A Übungsaufgaben

A.1 Übungen zu skalaren Lösungsverfahren

Aufgabe 1

In $G := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \subseteq \mathbb{R}^2$ sei P_c mit $c > 0$ die Schar der (Halb-)Parabeln $y = cx^2$ $(x > 0)$.

(a) Man bestimme eine Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, deren Lösungen genau die Parabeln P_c sind.

(b) Man stelle die Differenzialgleichung der Orthogonal-Trajektorien zur Schar P_c $(c > 0)$ auf und löse sie.

Aufgabe 2

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen, d.h. die Lösung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

$$a)\quad y' = e^y \cos(x), \qquad b)\quad y' = \sqrt{1 - y^2} \quad (|y| < 1), \qquad c)\quad y' = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2) \quad (a, b > 0).$$

Aufgabe 3

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung:

$$y' = (x + y)^2.$$

Aufgabe 4

Man löse das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = xy - 3xy^2, \qquad y(0) = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 5

Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}, \qquad y(2) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 6

Lösen Sie die beiden Anfangswertprobleme

$$y' = \frac{3}{x}y - y^2 - \frac{3}{x^2}, \qquad y(2) = \frac{1}{2} \text{ bzw. } y(2) = \frac{7}{6}.$$

Hinweis: Substituiere $z := \frac{1}{x}$.

Aufgabe 7

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right), \qquad y(2) = 2.$$

Aufgabe 8

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = (x + y - 4)^2, \qquad y(\pi) = 4 - \pi.$$

Aufgabe 9

Lösen Sie folgende Differenzialgleichung:

$$(2x+4y+2)\ \mathrm{d}x+(4x+12y+8)\ \mathrm{d}y=0, \qquad y(0)=-1.$$

Wie lassen sich die Lösungen geometrisch interpretieren?

Aufgabe 10

Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$(xy^2+xye^x)\ \mathrm{d}x+(2x^2y+xe^x)\ \mathrm{d}y=0.$$

A.2 Übungen zu linearen Differenzialgleichungen

Aufgabe 11

Finden Sie Lösungen $x_1, x_2, x_3, x_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu dem linearen Anfangswertproblem

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dot{x}_1 & = & 2x_1+x_2+x_3 & x_1(0)=c_1 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_2+x_3+3x_4 & x_2(0)=c_2 \\ \dot{x}_3 & = & 2x_3 & x_3(0)=c_3 \\ \dot{x}_4 & = & x_4 & x_4(0)=c_4 \end{array}\right. ,$$

wobei c_1, c_2, c_3, c_4 reelle Konstanten sind.

Aufgabe 12

Eine Kugel wird im Punkt $x_0 = x(0)$ einmalig angestoßen und rollt mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(0)$ von dort aus ohne weiteren Antrieb, aber unter dem Einfluss der Reibungskraft $f(v) = \alpha + \beta v^2$ $(\alpha, \beta > 0)$ geradlienig weiter.

Die Bewegung der Kugel wird dabei beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} = -f(\dot{x}).$$

(1) Wie lange dauert es, bis die Kugel stehen bleibt? Wie lange dauert es maximal $(v_0 \to \infty)$?

(2) Welchen Weg hat sie dann zurück gelegt?