Zusatzblatt 2

Aufgabe 11

Finden Sie Lösungen $x_1, x_2, x_3, x_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu dem linearen Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 & x_1(0) = c_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + x_3 + 3x_4 & x_2(0) = c_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 & x_3(0) = c_3 \\ \dot{x}_4 &= x_4 & x_4(0) = c_4 \end{cases},$$

wobei c_1, c_2, c_3, c_4 reelle Konstanten sind.

Lösung

(1) Reduktion auf System erster Ordnung:

$$\dot{x} = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4.$$

(2) Bestimmung der Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

(3) Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1)v_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 3c \\ y_2 = -3c \\ y_3 = 0 \\ y_4 = c \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ (A-\lambda_2)v_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = c \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

(4) $v_2 \in \text{Bild}(A-\lambda_2)$, denn $(A-\lambda_2)e^{(2)} = v_2$. Berechnung der beiden Hauptvektoren zu v_2:

$$\begin{aligned} (A-\lambda_2)h_1 = v_1 \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = c \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ (A-\lambda_2)h_2 = h_1 \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = c \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(5) Spätestens jetzt (in diesem Beispiel aber schon nach (3)) ist klar, wie die Jordan-Matrix aussieht:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(6) Transformationsmatrix (man beachte die richtige Reihenfolge der Spalten):

$$U = (v_2\ h_1\ h_2\ v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) Berechnung von $\exp(tJ)$:

$$e^{tJ} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^t \end{array}\right).$$

(8) Fundamentalsystem:

$$e^{tA} = Ue^{tJ}U^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (\frac{t^2}{2}+t)e^{2t} & 3(te^{2t}+e^t) \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 3(e^{2t}-e^t) \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

(9) Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3(\frac{t^2}{2}+t)e^{2t} + c_43(te^{2t}+e^t) \\ c_2e^{2t} + c_3te^{2t} + c_43(e^{2t}-e^t) \\ c_3e^{2t} \\ c_4e^t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Eine Kugel wird im Punkt $x_0 = x(0)$ einmalig angestoßen und rollt mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(0)$ von dort aus ohne weiteren Antrieb, aber unter dem Einfluss der Reibungskraft

$$f(v) = \alpha + \beta v^2 \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

geradlienig weiter.

Die Bewegung der Kugel wird dabei beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} = -f(\dot{x}).$$

(1) Wie lange dauert es, bis die Kugel stehen bleibt? Wie lange dauert es maximal ($v_0 \to \infty$)?

(2) Welchen Weg hat sie dann zurück gelegt?

Lösung

Ohne Reibung liegt ein triviales lineares Anfangswertproblem vor:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right. \rightsquigarrow\ x(t) = tv_0 + x_0.$$

Mit Reibungsterm: Substituiere $u := \dot{x}$ und löse

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{u} = -\frac{1}{m}(\alpha + \beta u^2) \\ u(0) = v_0 \end{array}\right. .$$

Mit Separation der Variablen:

$$f(t) := 1 \text{ und } g(u) := -\frac{1}{m}(\alpha+\beta u^2) \ \rightsquigarrow\ F(t) := \int_0^t \mathrm{d}t = t \text{ und } G(u) := -m\int_{v_0}^u \frac{\mathrm{d}y}{\alpha+\beta y^2}.$$

Unter Ausnutzung von

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)$$

ergibt Gleichsetzen

$$\begin{aligned} G(u) &= -m\int_{v_0}^{u}\frac{\mathrm{d}y}{\alpha+\beta y^2} \\ &= -\frac{m}{\alpha}\int_{v_0}^{u}\frac{\mathrm{d}y}{1+\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}y\right)^2} \\ &= -\frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}y\right)\right]_{v_0}^{u} \\ &= -\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}u\right)-\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)\right) \\ &\overset{!}{=} t. \end{aligned}$$

Auflösen nach u ergibt

$$u=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}t\right)=\dot{x}(t).$$

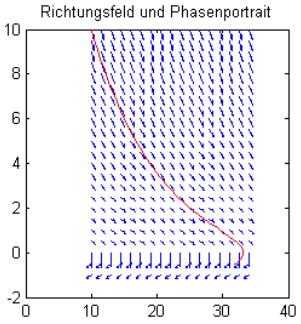
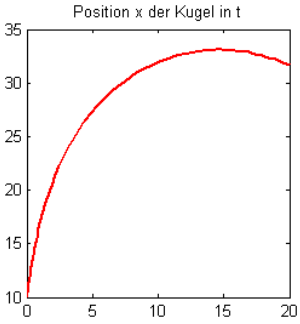
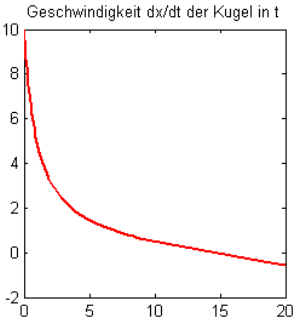
(1) Stillstand zur Zeit T bedeutet: $\dot{x}(T)=0$. Mit $G(0)=F(T)$:

$$0=\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan(0)=-T+\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)\ \rightsquigarrow\ T=\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right).$$

Für $v_0\to\infty$:

$$\lim_{v_0\to\infty}T(v_0)=\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\frac{\pi}{2}<\infty.$$

(2) Berechnung von $x(T)$ mit

$$\int\tan(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x)| \qquad \text{(auf geeignetem Bereich)}:$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0+\int_0^t\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tan\Bigg(\underbrace{\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)}_{=:c_1}-\underbrace{\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}}_{=:c_2}s\Bigg)\,\mathrm{d}s \\ &= x_0+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\int_0^1\tan(c_1-c_2s)\,\mathrm{d}s \\ &\overset{x\in[0,\frac{\pi}{2})}{=} x_0+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left(-\frac{1}{c_2}\right)\left[-\ln|\cos(c_1-c_2s)|\right]_0^t \\ &= x_0-\frac{m}{\beta}(\ln(\cos(c_1))-\ln(\cos(c_1-c_2t))) \\ &\overset{t:=T}{=} x_0-\frac{m}{\beta}\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)\right)\right). \end{aligned}$$