Zusatzblatt 1

Lemma

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $g \in \mathfrak{C}^1(D,\mathbb{R})$ und $f \in \mathfrak{C}^0(D \times E, \mathbb{R})$ mit $\forall x \in D : [0, g(x)] \subseteq E$ und $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar auf $[0, g(x)]$ sowie $\forall y \in E : x \mapsto f(x,y) \in \mathfrak{C}^1(D,\mathbb{R})$.

Dann ist $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_0^{g(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

auf D stetig differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x, g(x))g'(x) + \int_0^{g(x)} f_1(x,y)\ \mathrm{d}y.$$

Beweis

Definiere die beiden Funktionen $\Psi : g(D) \times D \to \mathbb{R}$ und $\Phi : D \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \Psi(a,b) &:= \int_0^a f(b,y)\ \mathrm{d}y \text{ und} \\ \Phi(x) &:= (g(x), x). \end{aligned}$$

Dann sind Ψ, Φ stetig differenzierbar, $F = (\Psi \circ \Phi)$ und es gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\Psi \circ \Phi)'(x) \\ &= (\nabla \Psi)(\Phi(x)) \circ \Phi'(x) \\ &= \left[\left. \begin{pmatrix} f(b,a) \\ \int_0^a f_1(b,y)\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \right|_{b=x}^{a=g(x)} \right] \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(x,g(x)) \\ \int_0^{g(x)} f_1(x,y)\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f(x,g(x))g'(x) + \int_0^{g(x)} f_1(x,y)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Behauptung

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha_2 \neq 0,\ u_0 \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $f \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Dann löst

$$u(x,y) := e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left(u_0 \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y \right) + \int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} f\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r \right)\ \mathrm{d}r \right)$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y &= \beta u + f \\ u|_\Gamma &= u_0, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die x-Achse bezeichne.

Beweis

Klar: u ist $\mathfrak{C}^1$. Wir müssen also nur nachrechnen, dass u die Differenzialgleichung erfüllt. Es gelten

$$\alpha_1 u_x(x,y) = \alpha_1 e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_0' \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y \right) + \int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} f_1 \left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r \right)\ \mathrm{d}r \right];$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 u_y(x,y) &= \alpha_2 \frac{\beta}{\alpha_2} e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[u_0\left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) + \int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} f\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r\right) \,\mathrm{d}r \right] \\ &\quad + \alpha_2 e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_0'\left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) + F'(y) \right]\end{aligned}$$

mit

$$F(y) := \int_0^{g(y)} \varphi(y,r) \,\mathrm{d}r, \qquad g(y) := \frac{y}{\alpha_2}, \qquad \varphi(y,r) = e^{-\beta r} f\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r\right).$$

Nach dem Lemma gilt dann

$$\begin{aligned}F'(y) &= \varphi(y, g(y)) g'(y) + \int_0^{g(y)} \varphi_1(y,r) \,\mathrm{d}r \\ &= e^{-\frac{\beta}{\alpha_2} y} f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \frac{\alpha_2}{\alpha_2} y\right) \frac{1}{\alpha_2} + \int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) f_1\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r\right)\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha_2 u_y(x,y) &= \beta e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[u_0\left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) + \int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} f\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r\right) \,\mathrm{d}r \right] \\ &\quad + e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[-\alpha_1 u_0'\left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) \right] + e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[e^{-\frac{\beta}{\alpha_2} y} f(x,y) \right] \\ &\quad + e^{\frac{\beta}{\alpha_2} y} \left[\int_0^{\frac{1}{\alpha_2} y} e^{-\beta r} (-\alpha_1) f_1\left(\alpha_1 r + x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y, \alpha_2 r\right) \right] \\ &= \beta u(x,y) + f(x,y) - \alpha_1 u_x(x,y)\end{aligned}$$