1 Bonusaufgaben I

1.1 Abelsche Gruppen und Morphismen

$*$-Aufgabe 1

(a) Sei A eine Menge. Sind $(\mathcal{P}(A), \cap)$ bzw. $(\mathcal{P}(A), \cup)$ ($\mathcal{P}(\cdot)$ die Potenzmenge) abelsche Gruppen?

(b) Sei $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ Additionstafel einer abelschen Gruppe $\mathcal{G} = (G, +)$, d.h. $G = \{a_1, ..., a_n\}$ mit a_i paarweise verschieden und $x_{ij} = a_i + a_j$ für alle i, j.

Dann taucht jedes Element aus G in jeder Zeile und in jeder Spalte von X genau einmal auf.

Welche Gruppeneigenschaften werden dabei benötigt?

(c) Seien $\mathcal{G} := (G, *)$ und $\mathcal{H} := (H, \circ)$ zwei abelsche Gruppen. Dann ist auch $\mathcal{G} \times \mathcal{H} := (G \times H, +)$ eine abelsche Gruppe, wobei $G \times H := ((g, h) \mid g \in G,\ h \in H)$ und $(g, h) + (g', h') := (g * g', h \circ h')$.

(d) Die Gruppen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$ sind nicht isomorph.

(4 Punkte)

$*$-Aufgabe 2

Seien A, B Mengen und $* : A \times A \to A, \circ : B \times B \to B$ Abbildungen („innere Verknüpfungen“).

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt „Morphismus zwischen $(A, *)$ und $(B, \circ)$“, falls für alle $a, a' \in A$ gilt $f(a * a') = f(a) \circ f(a')$.

Seien nun A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann definiert $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ einen Morphismus zwischen $(\mathcal{P}(B), \cap)$ und $(\mathcal{P}(A), \cap)$ und einen zwischen $(\mathcal{P}(B), \cup)$ und $(\mathcal{P}(A), \cup)$.

(4 Punkte)

$*$-Aufgabe 3

Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff \forall X, Y \subseteq A : f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Dabei ist $f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$.

(4 Punkte)

$*$-Aufgabe 4

Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gelten:

(a) Die Abbildung $\Phi : G \to G$ mit $\Phi(g) := g^2$ definiert genau dann einen Gruppenhomomorphismus, wenn $\mathcal{G}$ abelsch ist.

(b) Die Abbildung $\Phi : G \to G$ mit $\Phi(g) := g^{-1}$ definiert genau dann einen Gruppenisomorphismus, wenn $\mathcal{G}$ abelsch ist.

(4 Punkte)

(freiwilliger) **Abgabetermin**:
30.11.2009