

1.2 Lösungen

LÖSUNG 1

- (a) $(\mathcal{P}(A), \cap)$ ist im Allgemeinen (genauer: falls $A \neq \emptyset$) keine abelsche Gruppe: Sonst wäre $A \in \mathcal{P}(A)$ das (eindeutige) neutrale Element bzgl. \cap , denn für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt wegen $X \subseteq A$, dass $X \cap A = X$. Allerdings findet sich zu $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ kein $X \in \mathcal{P}(A)$ mit $\emptyset \cap X = A$, denn wegen $\emptyset \cap X = \emptyset$ wäre sonst $A = \emptyset$, was unserer Annahme widerspricht. Also besitzt nicht jedes Element in $\mathcal{P}(A)$ ein Inverses und $(\mathcal{P}(A), \cap)$ ist folglich keine (abelsche) Gruppe.

Auch $(\mathcal{P}(A), \cup)$ ist für $A \neq \emptyset$ keine abelsche Gruppe: Andernfalls wäre \emptyset das neutrale Element bzgl. \cup , $A \in \mathcal{P}(A)$ besitzt aber kein Inverses: Es gibt kein $X \in \mathcal{P}(A)$ mit $X \cup A = \emptyset$. \blacklozenge

- (b) Tauche in der Spalte j ein Element $a \in \{a_1, \dots, a_n\}$ zweimal auf, etwa in den Zeilen i_1 und i_2 ($i_1 \neq i_2$), d.h. $x_{i_1, j} = a = x_{i_2, j}$. Nach Definition der x_{ij} ist dann $a_{i_1} + a_j = a = a_{i_2} + a_j$. Da \mathcal{G} nach Voraussetzung eine abelsche Gruppe ist, existiert ein Inverses $-a_j$ von a_j in G . Addiert man dieses $-a_j$ zu obiger Gleichung, so ergibt sich $a_{i_1} = a_{i_2}$ im Widerspruch dazu, dass G n Elemente hat.

Also taucht jedes Element aus G höchstens einmal in jeder Spalte auf; da X n Spalten und G n Elemente hat, muss dann jedes Element aus G genau einmal auftauchen.

Für Zeilen i argumentiert man analog.

Wir haben dabei die Existenz der Inversen (I) benötigt, die Existenz des Neutralen (N), um überhaupt über Inverse sprechen zu können, und die Assoziativität (A), um nach Addition von $-a_j$ auf beiden Seiten so umklammern zu können, dass sich $a_j + (-a_j)$ zu Null addiert. Die Kommutativität (K) haben wir nicht gebraucht. \blacklozenge

- (c) Seien $g, g', g'' \in G$ und $h, h', h'' \in H$. Dann gelten:

- (1) **Abgeschlossenheit:** Da \mathcal{G}, \mathcal{H} Gruppen, sind $g * g' \in G$ und $h \circ h' \in H$, d.h.

$$(g, h) + (g', h') = (g * g', h \circ h') \in G \times H.$$

- (2) **Assoziativität:** Da \mathcal{G}, \mathcal{H} assoziativ, sind $g * (g' * g'') = (g * g') * g''$ und $h \circ (h' \circ h'') = (h \circ h') \circ h''$, d.h.

$$\begin{aligned} (g, h) + ((g', h') + (g'', h'')) &= (g, h) + (g' * g'', h' \circ h'') \\ &= (g * (g' * g''), h \circ (h' \circ h'')) = ((g * g') * g'', (h \circ h') \circ h'') \\ &= (g * g', h \circ h') + (g'', h'') = ((g, h) + (g', h')) + (g'', h''). \end{aligned}$$

- (3) **Kommutativität:** Da \mathcal{G}, \mathcal{H} abelsch, sind $g * g' = g' * g$ und $h \circ h' = h' \circ h$, d.h.

$$(g, h) + (g', h') = (g * g', h \circ h') = (g' * g, h' \circ h) = (g', h') + (g, h).$$

- (4) **Existenz des Neutralen:** Sei 0_* das Neutrale von \mathcal{G} und 0_\circ das von \mathcal{H} , dann ist $(0_*, 0_\circ) \in G \times H$ neutral bzgl. $+$:

$$(g, h) + (0_*, 0_\circ) = (g * 0_*, h \circ 0_\circ) = (g, h).$$

- (5) **Existenz der Inversen:** Seien $-g$ das Inverse von g in \mathcal{G} und $-h$ das Inverse von h in \mathcal{H} , dann ist $(-g, -h) \in G \times H$ invers zu (g, h) bzgl. $+$:

$$(g, h) + (-g, -h) = (g * (-g), h \circ (-h)) = (0_*, 0_\circ).$$

Also erfüllt $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ alle Axiome für abelsche Gruppen. \blacklozenge

- (d) Angenommen, es gäbe einen (Gruppen-)Isomorphismus $\Phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$. Dann bildet Φ selbstinverse Elemente auf selbstinverse Elemente ab, denn sei $x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit $x + x = (0, 0)$, dann

$$0 = \Phi((0, 0)) = \Phi(x + x) = \Phi(x) + \Phi(x),$$

d.h. auch $\Phi(x) \in \mathbb{Z}_4$ ist selbstinvers.

Nun sind offenbar alle vier Elemente von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ selbstinvers, aber nur zwei Elemente von $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, nämlich 0 und 2. Dann kann Φ aber nicht bijektiv, also insbesondere kein Isomorphismus sein, Widerspruch. \blacksquare

LÖSUNG 2

Seien $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ (d.h. $X, Y \subseteq B$) und $a \in A$ beliebig.

(1) Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cap Y) &\Leftrightarrow f(a) \in X \cap Y \\ &\Leftrightarrow f(a) \in X \text{ und } f(a) \in Y \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \text{ und } a \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

(2) Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cup Y) &\Leftrightarrow f(a) \in X \cup Y \\ &\Leftrightarrow f(a) \in X \text{ oder } f(a) \in Y \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \text{ oder } a \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

LÖSUNG 3

\Rightarrow : Sei f injektiv. Seien $X, Y \subseteq A$ und $b \in f(X \cap Y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} b \in f(X \cap Y) &\Rightarrow \exists z \in X \cap Y : f(z) = b \\ &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = b \text{ und } \exists y \in Y : f(y) = b \\ &\Rightarrow b \in f(X) \text{ und } b \in f(Y) \\ &\Rightarrow b \in f(X) \cap f(Y). \end{aligned}$$

(Hier haben wir nicht mal die Injektivität von f benötigt.) Damit ist $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Seien nun $X, Y \subseteq A$ und $b \in f(X) \cap f(Y)$, dann

$$\begin{aligned} b \in f(X) \cap f(Y) &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = b \text{ und } \exists y \in Y : f(y) = b \\ &\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \exists z \in X \cap Y : f(z) = b \\ &\Rightarrow b \in f(X \cap Y). \end{aligned}$$

Damit ist $f(X \cap Y) \supseteq f(X) \cap f(Y)$. Insgesamt also $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ und das war zu zeigen.

\Leftarrow : Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$, dann gilt nach Annahme:

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}.$$

Wegen $f(x) = f(y)$ ist $\#\{f(x)\} \cap \{f(y)\} = 1$, also auch $\#\{f(\{x\} \cap \{y\})\} = 1$, d.h. $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, d.h. $x = y$. Also ist f injektiv. \blacksquare

LÖSUNG 4

(a) Sei zunächst Φ ein Gruppenhomomorphismus. Zu zeigen: \mathcal{G} ist kommutativ. Seien dazu $a, b \in G$, dann gilt:

$$abab = (ab)^2 = \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) = a^2b^2 = aabb \quad \Longrightarrow \quad ba = ab.$$

Sei nun G abelsch. Zu zeigen: Φ ist ein Homomorphismus. Seien dazu $a, b \in G$, dann

$$\Phi(ab) = (ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2 = \Phi(a)\Phi(b).$$

(b) Sei zunächst Φ ein Gruppenisomorphismus. Zu zeigen: \mathcal{G} ist kommutativ. Seien dazu $a, b \in G$, dann gilt:

$$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = \Phi(a^{-1}b^{-1}) = \Phi(a^{-1})\Phi(b^{-1}) = (a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1} = ab.$$

Sei nun G abelsch. Klar: Φ ist bijektiv. Zu zeigen: Φ ist ein Homomorphismus. Seien dazu $a, b \in G$, dann

$$\Phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \Phi(a)\Phi(b). \quad \blacksquare$$