2 Vektorräume und Gleichungssysteme

2.1 Der n-dimensionale $\mathcal{K}$-Vektorraum

Definition 2.1

Seien $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ ein Körper, V eine Menge und $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ (neue) Abbildungen.

Dann heißt $\mathcal{V} := (V, +, \cdot)$ ein *$\mathcal{K}$-Vektorraum*, falls $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h.

(1) $\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$;
(2) $\forall v, w \in V : v + w = w + v$;
(3) $\exists 0 \in V : \forall v \in V : v + 0 = v$;
(4) $\forall v \in V : \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$

und für alle $\alpha, \beta \in K,\ v, w \in V$ gelten:

(5) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
(6) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
(7) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
(8) $1 \cdot v = v$.

Beispiel 2.2

(1) Versehen wir die Menge $K^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in K\}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &:= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n); \\ \alpha(x_1, ..., x_n) &:= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \end{aligned}$$

$(x, y \in K^n,\ \alpha \in K)$, so wird K^n zu einem $\mathcal{K}$-Vektorraum.

(2) Die Menge F aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x); \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

$(f, g \in F,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R})$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{F}$. ◊

Definition 2.3

Seien $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt $\mathcal{U} := (U, +|_U, \cdot|_U)$ ein *($\mathcal{K}$-)Untervektorraum* von $\mathcal{V}$ (in Zeichen: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$), falls gelten:

(1) $\forall v, w \in U : v + w \in U$;
(2) $\forall v \in U,\ \alpha \in K : \alpha v \in U$;
(3) $U \neq \emptyset$ $(\Leftrightarrow 0 \in U)$.

Bemerkung 2.4

Ein Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ eines $\mathcal{K}$-Vektorraums $\mathcal{V}$ ist stets selbst wieder ein $\mathcal{K}$-Vektorraum. ◊

Beispiel 2.5

(1) Seien $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum, $v_1, ..., v_m \in V$, dann ist

$$\mathcal{U} := \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_m\}) := \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m \mid \alpha_1, ..., \alpha_m \in K\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$.

$\{v_1, ..., v_m\}$ heißt ein *Erzeugendensystem* von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ der von $\{v_1, ..., v_m\}$ *aufgespannte* Raum. Elemente aus $\mathcal{U}$ werden *Linearkombinationen* aus $\{v_1, ..., v_m\}$ genannt.

(2) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ und $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$ definieren Unterräume von $\mathcal{F}$.

Entsprechend definiert $\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}$ einen Untervektorraum von $\mathcal{F}' = (F', +, \cdot)$ mit $F' = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ (und $+, \cdot$ wie bei $\mathcal{F}$). ◊

Definition 2.6

Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum. $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, falls für alle $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ gilt: $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \ ..., \ \alpha_m = 0$.

Andernfalls heißt $\{v_1, ..., v_m\}$ *linear abhängig*.

Bemerkung 2.7

Genau dann ist $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, wenn kein v_i in $\mathrm{span}(\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\})$ liegt ($i = 1, ..., m$), d.h. wenn keines dieser v_i „überflüssig“ ist. $\Diamond$

Definition 2.8

Seien $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig mit $V = \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$.

Dann heißt $\mathfrak{V} := \{v_1, ..., v_n\}$ eine *Basis* von $\mathcal{V}$. n heißt die *Dimension* von $\mathcal{V}$.

Notation 2.9

Im Folgenden seien stets $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. $\Diamond$

Satz 2.10 (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $\{w_1, ..., w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, dann ist (gegebenfalls nach Umnummerierung der Basiselemente) auch $\mathfrak{W} := \{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

Folgerung 2.11

(1) Die Dimension $\dim \mathcal{V} = n$ ist wohldefiniert, d.h. jede Basis von $\mathcal{V}$ enthält genau n Elemente.

(2) **Jeder endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis.**

Mehr noch: Ist $\{w_1, ..., w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig, so existieren $v_{m+1}, ..., v_n \in V$ derart, dass $\mathfrak{W} := \{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist (Basisergänzungssatz).

(3) Ist $\mathcal{W}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$, dann $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$, wobei „=“ genau dann gilt, wenn $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

(4) Zu **jedem** $v \in \mathcal{V}$ existieren **eindeutige** $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ hängen allerdings von der gewählten Basis $\mathfrak{V}$ ab!. $\Diamond$

Beispiel 2.12

(1) K^n ist ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum mit kanonischer Basis $\mathfrak{E} := \{e^{(1)}, ..., e^{(n)}\}$, wobei $e^{(i)}$ der i-te Einheitsvektor: $e^{(i)} := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 an i-ter Stelle).

(2) $K^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in K\}$ definiert (mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) einen $\mathcal{K}$-Vektorraum. Da $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K^{\mathbb{N}}$ linear unabhängig, ist $K^{\mathbb{N}}$ unendlich dimensional. $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist aber keine Basis von $K^{\mathbb{N}}$: Die Einsfolge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine (endliche!) Linearkombination von Elementen aus $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ($e^{(i)} := (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ mit 1 an i-ter Stelle).

(3) $L := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim a_n \text{ existiert}\}$ bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Grenzwertsätze).

$L_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim a_n = 0\}$ wiederum bildet einen Unterraum von L (und damit insbesondere von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

L, L_0 enthalten ebenfalls $\{e^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge: $\lim e^{(i)} = 0$. Also sind L, L_0 unendlichdimensional.

(4) Auch Die Funktionenräume $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sowie ihre Unterräume aus Beispiel 2.5 sind unendlichdimensional: Bereits $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ ist eine unendliche, linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$ (aber noch keine Basis).

Wir werden im Folgenden keine unendlichdimensionalen Vektorräume betrachten.

(5) $\mathcal{P} := \{p \in K[X] \mid \deg p \leq n\}$ ist ein $(n+1)$-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum (mit üblicher Addition und skalarer Multiplikation). Eine Basis von $\mathcal{P}$ ist zum Beispiel $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$. $\Diamond$

2.2 Homogene, lineare Gleichungssysteme

Definition 2.13

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $a_{ij} \in K$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Dann heißt

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

ein *homogenes, lineares Gleichungssystem* (über $\mathcal{K}$) in den *Unbestimmten* $X_1, ..., X_n$.

$$(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt die zu $(*)$ gehörige *Koeffizientenmatrix*.

Ein $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ heißt eine *Lösung* von $(*)$, falls gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}.$$

$\mathbb{L} := \{x \in K^n \mid x \text{ ist eine Lösung von } (*)\}$ heißt die *Lösungsmenge* von $(*)$.

Bemerkung 2.14

(1) Die Menge $K^{m\times n} := \{(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \mid \forall i,j : a_{ij} \in K\}$ bildet einen $\mathcal{K}$-Vektorraum, wenn man setzt

$$(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} + (b_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := (a_{ij} + b_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \qquad \text{und} \qquad \alpha(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} := (\alpha a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m}.$$

(2) Seien $A := (a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \in K^{m\times n}$ und $x := (x_1, ..., x_n) \in K^n$, dann setzen wir

$$Ax := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Weiter bezeichnen wir die i-te Zeile von A mit A_i und die j-te Spalte mit $A^{(j)}$.

(3) Die Lösungsmenge von $(*)$ lässt sich also schreiben als $\mathbb{L} = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$.

(4) Seien $x, y \in K^n$, dann setzen wir

$$x \bullet y := x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

Dann ist $\mathbb{L} = \{x \in K^n \mid \forall i = 1, ..., m : A_i \bullet x = 0\}$. ◊

Satz 2.15

$\mathbb{L}$ ist ein Untervektorraum von K^n, d.h. Linearkombinationen von Lösungen zu $(*)$ sind wieder Lösungen zu $(*)$.

Bemerkung 2.16

(1) Für $A \in K^{m\times n}$ gilt stets $\dim \operatorname{span}(\{A_1, ..., A_m\}) = \dim \operatorname{span}(\{A^{(1)}, ..., A^{(n)}\})$. Wir bezeichnen diese Dimension als den *Rang* von A (in Zeichen: $\operatorname{rg}(A)$).

(2) Es gilt stets $\dim \mathbb{L} = n - \operatorname{rg}(A)$. Insbesondere besitzt $(*)$ nur die triviale Lösung $x = 0$, wenn $\operatorname{rg}(A) = n$.

(3) Mit dem **Gauß-Algorithmus** kann man immer eine Basis von $\mathbb{L}$ berechnen. ◊

2.3 Gauß-Algorithmus

Satz 2.17 (Elementare Zeilenoperationen)

Der *Zeilenraum* $\mathrm{span}(\{A_1, ..., A_m\}) \subseteq K^n$ (und damit auch der Lösungsraum $\mathbb{L}$) ändert sich nicht bei

(a) Multiplikation der i-ten Zeile von $(*)$ mit beliebigem $\lambda \neq 0$;
(b) Addieren eines λ-fachen einer j-ten Zeile zur Zeile i $(i \neq j)$;
(c) Vertauschen der i-ten mit einer j-ten Zeile.

Bemerkung 2.18 (Gauß-Algorithmus)

Durch iterierte Anwendung von (a)-(c) kann man jede Matrix folgendermaßen (in eindeutiger Weise) auf *reduzierte Stufenform* bringen:

(1) Suche die erste Spalte j_1 mit $a_{ij_1} \neq 0$ für ein i. Sei i_1 das erste solche. Dividiere die i_1-te Zeile durch $a_{i_1 j_1}$ (a), vertausche sie mit der ersten Zeile (c) und mache alle anderen Komponenten der j_1-ten Spalte zu 0 (b).

(2) Suche nach der ersten Spalte j_2 rechts von Spalte j_1 mit einem $a_{j_1 i} \neq 0$, $i \geq 2$. Sei i_2 das erste solche i. Dividiere dann die i_2-te Zeile durch $a_{i_2 j_2}$, vertausche sie mit der zweiten Zeile und mache alle anderen Komponenten der j_2-ten Spalte zu 0.

(3) Iteriere diesen Prozess bis maximal zum n-ten Schritt. Wir erhalten so:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } 3 \\ \\ \text{Zeile } r \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{matrix} k_1 & k_2 & j_1 & j_2 & k_3 & k_4 & j_3 & \cdots & j_r & k_{n-r} \end{matrix} & \end{array}$$

Dann besitzt $(*)$ den selben Lösungsraum wie das zur reduzierten Matrix gehörige, r-zeilige Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{llllllllll} X_{j_1} & & + & a'_{1,k_3} X_{k_3} & + & a'_{1,k_4} X_{k_4} & & + \cdots & + & a'_{1,k_{n-r}} X_{k_{n-r}} = 0 \\ & X_{j_2} & + & a'_{2,k_3} X_{k_3} & + & a'_{2,k_4} X_{k_4} & & + \cdots & + & a'_{2,k_{n-r}} X_{k_{n-r}} = 0 \\ & & & & & & X_{j_3} & + \cdots & + & a'_{3,k_{n-r}} X_{k_{n-r}} = 0 \\ \\ & & & & & & & X_{j_r} & + & a'_{r,k_{n-r}} X_{k_{n-r}} = 0 \end{array} \right. \qquad (**)$$

in den n Unbestimmten $X_{k_1}, ..., X_{k_{n-r}}, X_{j_1}, ..., X_{j_r}$.

Dann besitzt der Lösungsraum $\mathbb{L}$ von $(*)$ bzw. $(**)$ eine Basis aus $n-r$ Elementen der Gestalt

$$x = (x_{k_1}, x_{k_2}, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{k_3}, x_{k_4}, x_{j_3}, ..., x_{j_r}, x_{k_{n-r}}) \in K^n.$$

Eine solche ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_{k_1} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq 1), & x_{j_l} = -a'_{l,k_1} \quad (l = 1, ..., r) \\ x_{k_2} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq 2), & x_{j_l} = -a'_{l,k_2} \quad (l = 1, ..., r) \\ \\ x_{k_{n-r}} = 1, & x_{k_i} = 0 & (i \neq (n-r)), & x_{j_l} = -a'_{l,k_{n-r}} \quad (l = 1, ..., r) \end{array} \right. ,$$

d.h.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{llllllllll} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_3} & -a'_{2,k_3} & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0) \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_4} & -a'_{2,k_4} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0) \\ \\ (0 & 0 & -a'_{1,k_{n-r}} & -a'_{2,k_{n-r}} & 0 & 0 & -a'_{3,k_{n-r}} & ... & -a'_{r,k_{n-r}} & 1) \end{array} \right\}.$$

Die *Basislösungen* $x^{(1)}, ..., x^{(n-r)}$ sind also so konstruiert, dass für alle $i = 1, ..., (n-r)$, $j = 1, ..., m$ gilt:

$$A_j \bullet x^{(i)} = 1 \cdot (-a'_{j,k_i}) + a'_{j,k_i} \cdot 1 = 0 \qquad \Diamond$$

2.4 Inhomogene, lineare Gleichungssysteme

Definition 2.19

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $a_{ij}, b_i \in K$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ und $X_1, ..., X_n$ Unbestimmte. Dann heißt

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{$+$}$$

ein *inhomogenes, lineares Gleichungssystem* (über $\mathcal{K}$) mit *einfacher Koeffizientenmatrix*

$$A := (a_{ij})_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq m} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und *erweiterter Koeffizientenmatrix*

$$(A|b) := (a_{ij}|b_i)_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq m} := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{$*$}$$

heißt *zugehöriges homogenes System*.

Bemerkung 2.20

(1) Genau wie bei homogenen Gleichungssystemen bezeichnen wir $x \in K^n$ als *Lösung* von $(+)$, wenn x alle m Gleichungen von $(+)$ erfüllt. $\mathbb{L}_+$ bezeichne die Menge aller Lösungen von $(+)$.

x ist also genau dann eine Lösung von $(+)$, wenn für alle $i \in \{1, ..., m\}$ gilt: $A_i \bullet x = b_i$.

(2) Sei $x' \in K^n$ irgendeine Lösung von $(+)$ und bezeichne $\mathbb{L}_*$ die Lösungsmenge von $(*)$, dann ist

$$\mathbb{L}_+ = x' + \mathbb{L}_* := \{x' + x \mid x \in \mathbb{L}_*\}.$$

Beachte: Ist $x' \notin \mathbb{L}_*$, dann ist $\mathbb{L}_+$ kein Vektorraum. Man bezeichnet diese Mengen als *affine Räume*.

(3) Mit dem Gaußalgorithmus können wir $(a_{ij}|b_i)_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq m}$ umformen zu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ & & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & b'_3 \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & b'_r \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_m \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } 3 \\ \\ \text{Zeile } r \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccc} k_1 & k_2 & j_1 & j_2 & k_3 & k_4 & j_3 & \cdots & j_r & k_{n-r} \end{array} & \end{array}$$

(4) $(+)$ ist genau dann lösbar, wenn $b'_i = 0$ für alle $i \in \{r+1, ..., m\}$. Eine spezielle Lösung ist dann

$$x' := (0, 0, b'_1, b'_2, 0, 0, b'_3, ..., b'_r, 0).$$

Beachte: Im Gegensatz zu homogenen Systemen können inhomogene Systeme unlösbar sein.

(5) Lösbarkeitskriterium: Genau dann besitzt $(+)$ eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. $\Diamond$