

3 Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Vektorraum-Homomorphismen

DEFINITION 3.1

Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei \mathcal{K} -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine Abbildung.

f heißt *linear* oder *Homomorphismus*, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Wir setzen $\text{Kern}(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ und $\text{Bild}(f) := f(V) = \{f(x) \in W \mid x \in V\}$.

BEMERKUNG 3.2

(1) Seien $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$. Dann liefert die Linearität von f gerade, dass $f(V')$ einen Untervektorraum von \mathcal{W} und $f^{-1}(W')$ einen Untervektorraum von \mathcal{V} definiert.

Insbesondere sind $\text{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von \mathcal{V} und $\text{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von \mathcal{W} .

(2) Sei $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von \mathcal{V} , dann ist $f(V) = \text{span}(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\})$.

(3) f ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$. In dem Fall ist $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von $f(V)$.

(4) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dann ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

(5) Allgemein nennen wir einen bijektiven Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ einen *Isomorphismus* und \mathcal{V}, \mathcal{W} *isomorph* (in Zeichen: $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$ *via* f). In dem Fall ist $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von \mathcal{W} .

(6) Seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \rightarrow W$, so dass gilt $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$. \diamond

SATZ 3.3 (Hauptsatz)

Sei \mathcal{V} ein n -dimensionaler \mathcal{K} -Vektorraum, dann ist \mathcal{V} isomorph zu K^n .

BEWEIS

(1) Sei $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von \mathcal{V} . Dann existieren zu jedem $v \in V$ eindeutige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, vgl. (2.11.4). Also definiert

$$\Psi_{\mathfrak{B}} : V \rightarrow K^n, \quad \Psi_{\mathfrak{B}}(v) := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

eine Abbildung.

(2) $\Psi_{\mathfrak{B}}$ ist linear: Seien $v, w \in V$, $\alpha, \beta \in K$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{B}}(\alpha v + \beta w) &= \Psi_{\mathfrak{B}}(\alpha[\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n] + \beta[\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n]) \\ &= \Psi_{\mathfrak{B}}([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1]v_1 + \dots + [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]v_n) \\ &= ([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1], \dots, [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]) \\ &= \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \alpha\Psi_{\mathfrak{B}}(v) + \beta\Psi_{\mathfrak{B}}(w). \end{aligned}$$

(3) $\Psi_{\mathfrak{B}}$ ist injektiv, denn $\text{Kern}(\Psi_{\mathfrak{B}}) = \{0\}$. Ebenso leicht sieht man, dass $\Psi_{\mathfrak{B}}$ surjektiv ist, denn sei $a := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, dann gilt für $v := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$, dass $\Psi_{\mathfrak{B}}(v) = a$.

(4) Also ist insgesamt $\mathcal{V} \cong K^n$. \square

BEMERKUNG 3.4

(1) $\Psi_{\mathfrak{B}}$ heißt die *Koordinatenabbildung* bzgl. \mathfrak{B} . Sei $v \in V$, dann heißen $\Psi_{\mathfrak{B}}(v) \in K^n$ der *Koordinatenvektor* von v und die Einträge $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die *Koordinaten* von v .

(2) Nach (3.2.5) bildet $\{\Psi_{\mathfrak{B}}(v_1), \dots, \Psi_{\mathfrak{B}}(v_n)\}$ eine Basis von K^n . \diamond

3.2 Matrizen

DEFINITION 3.5

Seien \mathcal{K} ein Körper, $K^{m \times n}$ der Vektorraum der $(m \times n)$ -Matrizen über \mathcal{K} .

Seien $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \in K^{n \times r}$, dann heißt $A \cdot B \in K^{m \times r}$, gegeben durch

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \cdot (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} := (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}} \quad \text{mit} \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

das **Matrixprodukt** von A und B und $A^T \in K^{n \times m}$, definiert als

$$[(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}]^T := (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}},$$

die zu A **transponierte Matrix**.

BEMERKUNG 3.6

- (1) Es sind $c_{ij} = A_i \bullet B^{(j)}$ und $[A^T]_i = A^{(i)}$, $[A^T]^{(j)} = A_j$.
- (2) Das Matrixprodukt \cdot (auf $K^{n \times n}$) ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt nicht $A \cdot B = B \cdot A$.
- (3) $K^{m \times n} \cong K^{m \cdot n}$ via $f : (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$.
- (4) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, falls ein $B \in K^{n \times n}$ existiert mit $AB = I = BA$ (wobei I die Einheitsmatrix $(\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ bezeichnet). In dem Fall ist B eindeutig bestimmt und heißt die zu A **inverse Matrix** (in Zeichen: $B = A^{-1}$) und es gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^{-1}) = n$.
- (5) Die Menge der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen bildet eine multiplikative (nicht abelsche) Gruppe, **GL**(n). Insbesondere ist mit A, B auch AB invertierbar (mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).
- (6) Seien $A \in K^{n \times n}$, $b \in K^n$ und $(A|b)$ die Koeffizientenmatrix des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, dann besitzt dieses genau dann eine eindeutige Lösung, wenn A invertierbar ist. Diese ist gegeben durch $x = A^{-1}b$. \diamond

BEMERKUNG 3.7 (Berechnung von A^{-1})

Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, d.h. die Matrixgleichung $AX = I$ eindeutig lösbar. Dann ist die j -te Spalte $X^{(j)}$ der zu A inversen Matrix A^{-1} gegeben als die (eindeutige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX^{(j)} = e^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$).

Zu lösen sind also die n Systeme $AX^{(1)} = e^{(1)}$, ..., $AX^{(n)} = e^{(n)}$. Dies ist simultan möglich mit dem Gauß-Algorithmus:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{array} \right) = (I|X),$$

dann ist $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ die zu A inverse Matrix. \diamond

DEFINITION 3.8

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich** (in Zeichen: $A \sim B$), wenn es eine Matrix $C \in \text{GL}(n)$ gibt mit $B = CAC^{-1}$.

BEMERKUNG 3.9

\sim definiert eine Äquivalenzrelation, ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. \diamond

3.3 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

BEMERKUNG 3.10

- (1) Die Menge der Homomorphismen von V nach W bezeichnen wir mit $\text{Hom}(V, W)$.
 (2) Sei $A \in K^{m \times n}$, dann definiert $\text{Lin}(A) : K^n \rightarrow K^m$, $x \mapsto Ax$ einen Homomorphismus. \diamond

SATZ 3.11

$\text{Lin} : K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(K^n, K^m)$, gegeben durch $A \mapsto \text{Lin}(A)$, definiert einen Isomorphismus.

BEWEIS

- (1) Lin ist linear: Seien $A, B \in K^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in K$ und $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\text{Lin}(\alpha A + \beta B)(e^{(i)}) = (\alpha A + \beta B) \cdot e^{(i)} = \alpha(A \cdot e^{(i)}) + \beta(B \cdot e^{(i)}) = (\alpha \text{Lin}(A) + \beta \text{Lin}(B))(e^{(i)}).$$

- (2) Lin ist injektiv: Sei $A \in \text{Kern}(\text{Lin})$, d.h. $\text{Lin}(A) = 0$, d.h. $Ax = 0$ für alle $x \in K^n$. Dann ist insbesondere $Ae^{(i)} = A^{(i)} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, d.h. $A = 0$. Also $\text{Kern}(\text{Lin}) = \{0\}$.
 (3) Lin ist surjektiv: Für $f \in \text{Hom}(K^n, K^m)$, setze $A^{(i)} := f(e^{(i)})$ ($i = 1, \dots, n$), dann gilt

$$\text{Lin}(A)(e^{(i)}) = A \cdot e^{(i)} = A^{(i)} = f(e^{(i)}),$$

d.h. $\text{Lin}(A)$ und f stimmen auf einer Basis von K^n überein. (3.2.6) $\Rightarrow \text{Lin}(A) = f$. \square

BEMERKUNG 3.12

- (1) Wir bezeichnen die zugehörige inverse Funktion $\text{Lin}^{-1} : \text{Hom}(K^n, K^m) \rightarrow K^{m \times n}$ mit Mat . Diese ordnet jedem Homomorphismus von K^n nach K^m eine eindeutig bestimmte, zugehörige Matrix zu.
 (2) Sei $f \in \text{Hom}(K^n, K^m)$, $A := \text{Mat}(f)$. Sei $x \in K^n$ beliebig. Dann gilt: $f(x) = A \cdot x$.
 (3) Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times r}$. Dann ist $\text{Lin}(A) \circ \text{Lin}(B) = \text{Lin}(AB)$.
 (4) Bisher haben wir nur Homomorphismen zwischen den Vektorräumen K^n und K^m mit Matrizen (aus $K^{m \times n}$) identifiziert.

Als nächstes wollen wir zu einem beliebigen $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit \mathcal{V}, \mathcal{W} endlichdimensionale K -Vektorräume der Dimensionen $\dim(\mathcal{V}) = n$, $\dim(\mathcal{W}) = m$, mit einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ identifizieren. Dazu fixieren wir Basen $\mathfrak{V} = (v_1, \dots, v_n)$ von \mathcal{V} und $\mathfrak{W} = (w_1, \dots, w_m)$ von \mathcal{W} .

Die zu f gehörige Matrix $A = \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}}(f) \in K^{m \times n}$ wird dann von \mathfrak{V} und von \mathfrak{W} (und der Reihenfolge der Basisvektoren!) abhängen. \diamond

DEFINITION 3.13

Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} , $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ wie in (3.12.3) und $\Psi_{\mathfrak{V}}, \Psi_{\mathfrak{W}}$ die Koordinatenabbildungen aus (3.3).

Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann heißt

$$A := \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}}(f) := \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$$

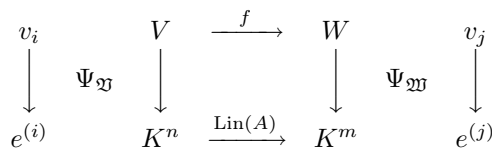
die *Darstellungsmatrix* von f bzgl. der Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

BEMERKUNG 3.14

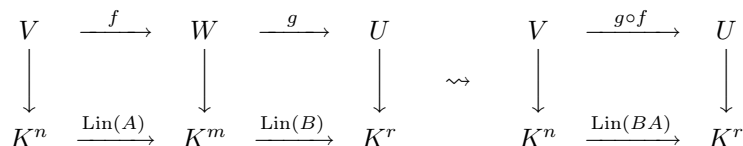
- (1) Sei $x \in V$. Dann ist $f(x) = \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot (\Psi_{\mathfrak{V}}(x)))$, d.h. bis auf Anwendung der (sehr einfachen) Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{V}} : v_i \mapsto e^{(i)}$ und $\Psi_{\mathfrak{W}} : w_j \mapsto e^{(j)}$ kann man die Bilder unter Homomorphismen durch Multiplikation mit der zugehörigen Darstellungsmatrix berechnen (\rightarrow Numerik).
 (2) Mehr noch: Auch Linearkombinationen und Verkettungen von Homomorphismen lassen sich in Matrizenoperationen übersetzen ($f : V \rightarrow W$, $g : W \rightarrow U$ mit den üblichen Bezeichnungen):

$$\text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(f) + \beta \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g), \quad \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f).$$

- (3) Die zu A gehörige, lineare Abbildung ist $\text{Lin}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{M}}(A) : K^n \rightarrow K^m$ mit $\text{Lin}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{M}}(A) = \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}$.
 (4) Man kann sich das Ganze anhand des folgenden Diagramms veranschaulichen:



- (5) Für Verkettungen $g \circ f$ (mit $A := \text{Mat}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{M}}(f)$, $B := \text{Mat}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}(g)$) sieht das so aus:



Korreakterweise hätten wir in den Diagrammen $\text{Lin}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{M}}$ bzw. $\text{Lin}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$, $\text{Lin}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ statt nur Lin schreiben müssen, aber wenn klar ist, welchen Basen man benutzt, lässt man die Indizes häufig weg. \diamond

BEMERKUNG 3.15 (Berechnung von A)

- (a) Zuerst berechnen wir die Bilder unter f der Basisvektoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$.
 (b) Als nächstes bestimmen wir die Koordinatenvektoren $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi}) \in K^m$ von $f(v_i)$ ($i = 1, \dots, n$).
 (c) Dann ist $A := (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ die gesuchte Matrix:

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \alpha_{1i}w_1 + \dots + \alpha_{mi}w_m \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}((\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi})) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}(A^{(i)}) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}(A \cdot e^{(i)}) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}(A \cdot \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(v_i)).
 \end{aligned}$$

Die Abbildung liefert also auf einer Basis von V und damit auf ganz V das Gewünschte. \diamond

BEMERKUNG 3.16

- (1) Beim Nachweis in (c), dass $A = \text{Mat}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{\mathfrak{M}}(f)$ ist, hätten wir auch umgekehrt vorgehen können:

$$\begin{aligned}
 A \cdot e^{(i)} &= A^{(i)} \\
 &= (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi}) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(\alpha_{1i}w_1 + \dots + \alpha_{mi}w_m) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f(v_i)) \\
 &= \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f(\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}(e^{(i)}))) \\
 &= (\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1})(e^{(i)}) \\
 &= \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}) \cdot e^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Die Spalten von A stimmen also mit denen von $\text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1})$ überein $\Rightarrow A = \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1})$.

- (2) Sind \mathcal{V}, \mathcal{W} nicht selbst bereits die Vektorräume K^n, K^m , so erhalten wir **niemals** eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für $x \in V$! Das Ganze funktioniert dann nur mit Hilfe der Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}, \Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$. \diamond

3.4 Basistransformation

DEFINITION 3.17

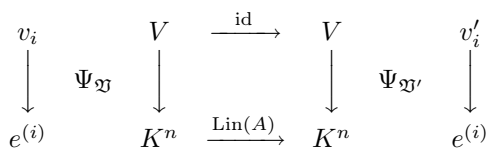
Seien \mathcal{V} ein n -dimensionaler \mathcal{K} -Vektorraum und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von \mathcal{V} . Dann heißt

$$A := \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\text{id}) = \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}'} \circ \Psi_{\mathfrak{B}}^{-1})$$

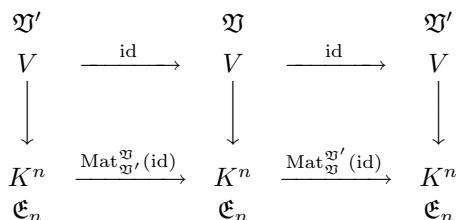
die *Transformationsmatrix* bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$.

BEMERKUNG 3.18

- (1) $\text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\text{id})$ übersetzt also Koordinaten bzgl. der Basis \mathfrak{B} in Koordinaten bzgl. \mathfrak{B}' .
- (2) Das zugehörige Diagramm ist



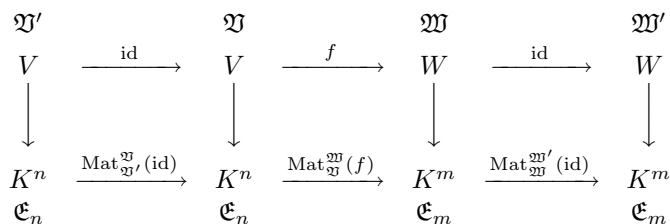
- (3) $A = \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\text{id})$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\text{id})$:



Die Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ ist also invers zur Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}$.

- (4) Seien \mathcal{V}, \mathcal{W} endlichdimensionale \mathcal{K} -Vektorräume mit Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ und seien $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ weitere Basen von \mathcal{V}, \mathcal{W} . Sei weiter $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ ein Homomorphismus.

Betrachte das zugehörige Diagramm



Dann gilt:

$$\text{Mat}_{\mathfrak{B}''}^{\mathfrak{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathfrak{B}''}^{\mathfrak{B}'}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}''}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\text{id}).$$

- (5) Seien speziell $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ zwei Basen von \mathcal{V} und $f \in \text{Hom}(V, V)$, dann sind $\text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(f), \text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ ähnlich:

$$\text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\text{id}) = \text{Mat}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(f) \cdot [\text{Mat}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\text{id})]^{-1}.$$

- (6) Seien speziell $\mathcal{V} = K^n, \mathcal{W} = K^m$ und $f \in \text{Hom}(K^n, K^m)$. Dann ist $\text{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{E}_n}(f) = \text{Mat}(f)$.

Seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}''$ weitere Basen von K^n, K^m , dann gilt $(\text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}}) = \text{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{B}}(\text{id}), \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}''}) = \text{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{B}''}(\text{id}))$

$$\text{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{B}''}(f) = \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}''}) \cdot \text{Mat}(f) \cdot \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}})^{-1}.$$

Sei $x \in K^n$ beliebig, dann gilt $f(x) = A \cdot x$ mit der Matrix

$$A = \text{Mat}(f) = \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}''})^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{B}''}(f) \cdot \text{Mat}(\Psi_{\mathfrak{B}}).$$

◇