3 Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Vektorraum-Homomorphismen

Definition 3.1

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ zwei $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung.

f heißt *linear* oder *Homomorphismus*, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Wir setzen $\mathrm{Kern}(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) := f(V) = \{f(x) \in W \mid x \in V\}$.

Bemerkung 3.2

(1) Seien $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$. Dann liefert die Linearität von f gerade, dass $f(V')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{W}$ und $f^{-1}(W')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{V}$ definiert.

Insbesondere sind $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$ und $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{W}$.

(2) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $f(V) = \mathrm{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$.

(3) f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. In dem Fall ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $f(V)$.

(4) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dann ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

(5) Allgemein nennen wir einen bijektiven Homomrphismus $f : V \to W$ einen *Isomorphismus* und $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *isomorph* (in Zeichen: $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$ *via* f). In dem Fall ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $\mathcal{W}$.

(6) Seien $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \to W$, so dass gilt $f(v_1) = w_1, \; ..., \; f(v_n) = w_n$. ◊

Satz 3.3 (Hauptsatz)

Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum, dann ist $\mathcal{V}$ isomorph zu K^n.

Beweis

(1) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann existieren zu jedem $v \in V$ eindeutige $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, vgl. (2.11.4). Also definiert

$$\Psi_{\mathfrak{V}} : V \to K^n, \qquad \Psi_{\mathfrak{V}}(v) := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

eine Abbildung.

(2) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ ist linear: Seien $v, w \in V$, $\alpha, \beta \in K$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{V}}(\alpha v + \beta w) &= \Psi_{\mathfrak{V}}(\alpha[\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n] + \beta[\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n]) \\ &= \Psi_{\mathfrak{V}}([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1]v_1 + ... + [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]v_n) \\ &= ([\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1], ..., [\alpha\alpha_n + \beta\beta_n]) \\ &= \alpha(\alpha_1, ..., \alpha_n) + \beta(\beta_1, ..., \beta_n) \\ &= \alpha\Psi_{\mathfrak{V}}(v) + \beta\Psi_{\mathfrak{V}}(w). \end{aligned}$$

(3) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ ist injektiv, denn $\mathrm{Kern}(\Psi_{\mathfrak{V}}) = \{0\}$. Ebenso leicht sieht man, dass $\Psi_{\mathfrak{V}}$ surjektiv ist, denn sei $a := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K$, dann gilt für $v := \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in V$, dass $\Psi_{\mathfrak{V}}(v) = a$.

(4) Also ist insgesamt $\mathcal{V} \cong K^n$. □

Bemerkung 3.4

(1) $\Psi_{\mathfrak{V}}$ heißt die *Koordinatenabbildung* bzgl. $\mathfrak{V}$. Sei $v \in V$, dann heißen $\Psi_{\mathfrak{V}}(v) \in K^n$ der *Koordinatenvektor* von v und die Einträge $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die *Koordinaten* von v.

(2) Nach (3.2.5) bildet $\{\Psi_{\mathfrak{V}}(v_1), ..., \Psi_{\mathfrak{V}}(v_n)\}$ eine Basis von K^n. ◊

3.2 Matrizen

Definition 3.5

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $K^{m\times n}$ der Vektorraum der $(m\times n)$-Matrizen über $\mathcal{K}$.

Seien $A=(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}\in K^{m\times n}$ und $B=(b_{ij})_{1\leq j\leq r}^{1\leq i\leq n}\in K^{n\times r}$, dann heißt $A\cdot B\in K^{m\times r}$, gegeben durch

$$(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}\cdot(b_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq r}:=(c_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq r}\quad\text{mit}\quad c_{ij}:=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

das *Matrixprodukt* von A und B und $A^T\in K^{n\times m}$, definiert als

$$[(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}]^T:=(a_{ji})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n},$$

die zu A *transponierte Matrix*.

Bemerkung 3.6

(1) Es sind $c_{ij}=A_i\bullet B^{(j)}$ und $[A^T]_i=A^{(i)},\ [A^T]^{(j)}=A_j$.

(2) Das Matrixprodukt $\cdot$ (auf $K^{n\times n}$) ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt nicht $A\cdot B=B\cdot A$.

(3) $K^{m\times n}\cong K^{m\cdot n}$ via $f:(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}\mapsto(a_{11},...,a_{1n},...,a_{m1},...,a_{mn})$.

(4) Eine Matrix $A\in K^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, falls ein $B\in K^{n\times n}$ existiert mit $AB=I=BA$ (wobei I die Einheitsmatrix $(\delta_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}$ bezeichnet). In dem Fall ist B eindeutig bestimmt und heißt die zu A *inverse Matrix* (in Zeichen: $B=A^{-1}$) und es gilt $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A^{-1})=n$.

(5) Die Menge der invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen bildet eine multiplikative (nicht abelsche) Gruppe, $\mathrm{GL}(n)$. Insbesondere ist mit A,B auch AB invertierbar (mit $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

(6) Seien $A\in K^{n\times n},\ b\in K^n$ und $(A|b)$ die Koeffizientenmatrix des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax=b$, dann besitzt dieses genau dann eine eindeutige Lösung, wenn A invertierbar ist. Diese ist gegeben durch $x=A^{-1}b$. ◊

Bemerkung 3.7 (Berechnung von A^{-1})

Sei $A\in K^{n\times n}$ invertierbar, d.h. die Matrixgleichung $AX=I$ eindeutig lösbar. Dann ist due j-te Spalte $X^{(j)}$ der zu A inversen Matrix A^{-1} gegeben als die (eindeutige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX^{(j)}=e^{(j)}$ $(j=1,...,n)$.

Zu lösen sind also die n Systeme $AX^{(1)}=e^{(1)}$, ..., $AX^{(n)}=e^{(n)}$. Dies ist simultan möglich mit dem Gauß-Algorithmus:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11}&\cdots&a_{1n}&1&&0\\ \vdots&&\vdots&&\ddots&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&0&x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ &\ddots&&\vdots&&\vdots\\ 0&&1&x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{array}\right)=(I|X),$$

dann ist $X=(x_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n}$ die zu A inverse Matrix. ◊

Definition 3.8

Zwei Matrizen $A,B\in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich* (in Zeichen: $A\sim B$), wenn es eine Matrix $C\in\mathrm{GL}(n)$ gibt mit $B=CAC^{-1}$.

Bemerkung 3.9

$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation, ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. ◊

3.3 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

Bemerkung 3.10

(1) Die Menge der Homomorphismen von V nach W bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(V, W)$.

(2) Sei $A \in K^{m\times n}$, dann definiert $\mathrm{Lin}(A) : K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ einen Homomorphismus. $\Diamond$

Satz 3.11

$\mathrm{Lin} : K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, gegeben durch $A \mapsto \mathrm{Lin(A)}$, definiert einen Isomorphismus.

Beweis

(1) Lin ist linear: Seien $A, B \in K^{n\times n},\ \alpha, \beta \in K$ und $i \in \{1, ..., n\}$, dann gilt

$$\mathrm{Lin}(\alpha A + \beta B)(e^{(i)}) = (\alpha A + \beta B) \cdot e^{(i)} = \alpha(A \cdot e^{(i)}) + \beta(B \cdot e^{(i)}) = (\alpha\mathrm{Lin}(A) + \beta\mathrm{Lin}(B))(e^{(i)}).$$

(2) Lin ist injektiv: Sei $A \in \mathrm{Kern}(\mathrm{Lin})$, d.h. $\mathrm{Lin}(A) = 0$, d.h. $Ax = 0$ für alle $x \in K^n$. Dann ist insbesondere $Ae^{(i)} = A^{(i)} = 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, d.h. $A = 0$. Also $\mathrm{Kern}(\mathrm{Lin}) = \{0\}$.

(3) Lin ist surjektiv: Für $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, setze $A^{(i)} := f(e^{(i)})$ $(i = 1, ..., n)$, dann gilt

$$\mathrm{Lin}(A)(e^{(i)}) = A \cdot e^{(i)} = A^{(i)} = f(e^{(i)}),$$

d.h. $\mathrm{Lin}(A)$ und f stimmen auf einer Basis von K^n überein. (3.2.6) $\Rightarrow \mathrm{Lin}(A) = f$. $\square$

Bemerkung 3.12

(1) Wir bezeichnen die zugehörige inverse Funktion $\mathrm{Lin}^{-1} : \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times n}$ mit Mat. Diese ordnet jedem Homomorphismus von K^n nach K^m eine eindeutig bestimmte, zugehörige Matrix zu.

(2) Sei $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m),\ A := \mathrm{Mat}(f)$. Sei $x \in K^n$ beliebig. Dann gilt: $f(x) = A \cdot x$.

(3) Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann ist $\mathrm{Lin}(A) \circ \mathrm{Lin}(B) = \mathrm{Lin}(AB)$.

(4) Bisher haben wir nur Homomorphismen zwischen den Vektorräumen K^n und K^m mit Matrizen (aus $K^{m\times n}$) identifiziert.

Als nächstes wollen wir zu einem beliebigen $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorräume der Dimensionen $\dim(\mathcal{V}) = n,\ \dim(\mathcal{W}) = m$, mit einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ identifizieren. Dazu fixieren wir Basen $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{W} = (w_1, ..., w_m)$ von $\mathcal{W}$.

Die zu f gehörige Matrix $A = \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f) \in K^{m\times n}$ wird dann von $\mathfrak{V}$ und von $\mathfrak{W}$ (und der Reihenfolge der Basisvektoren!) abhängen. $\Diamond$

Definition 3.13

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W},\ \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ wie in (3.12.3) und $\Psi_{\mathfrak{V}}, \Psi_{\mathfrak{W}}$ die Koordinatenabbildungen aus (3.3).

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann heißt

$$A := \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f) := \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi^{-1}_{\mathfrak{V}})$$

die *Darstellungsmatrix* von f bzgl. der Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

Bemerkung 3.14

(1) Sei $x \in V$. Dann ist $f(x) = \Psi^{-1}_{\mathfrak{W}}(A \cdot (\Psi_{\mathfrak{V}}(x)))$, d.h. bis auf Anwendung der (sehr einfachen) Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{V}} : v_i \mapsto e^{(i)}$ und $\Psi_{\mathfrak{W}} : w_j \mapsto e^{(j)}$ kann man die Bilder unter Homomorphismen durch Multiplikation mit der zugehörigen Darstellungsmatrix berechnen ($\to$ Numerik).

(2) Mehr noch: Auch Linearkombinationen und Verkettungen von Homomorphismen lassen sich in Matrizenoperationen übersetzen ($f : V \to W,\ g : W \to U$ mit den üblichen Bezeichnungen):

$$\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f) + \beta\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(g), \qquad \mathrm{Mat}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}(g) \cdot \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f).$$

(3) Die zu A gehörige, lineare Abbildung ist $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(A) : K^n \to K^m$ mit $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(A) = \Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}$.

(4) Man kann sich das Ganze anhand des folgenden Diagramms veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
v_i \arrow[d] & & V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d] & & v_j \arrow[d] \\
e^{(i)} & \Psi_{\mathfrak{V}} & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^m & \Psi_{\mathfrak{W}} & e^{(j)}
\end{tikzcd}$$

(5) Für Verkettungen $g \circ f$ (mit $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f)$, $B := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g)$) sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d] & U \arrow[d] & & V \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^m \arrow[r, "\mathrm{Lin}(B)"] & K^r & \rightsquigarrow & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(BA)"] & K^r
\end{tikzcd}$$

Korrekterweise hätten wir in den Diagrammen $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}$ bzw. $\mathrm{Lin}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}, \mathrm{Lin}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ statt nur Lin schreiben müssen, aber wenn klar ist, welchen Basen man benutzt, lässt man die Indizes häufig weg. $\Diamond$

Bemerkung 3.15 (Berechnung von A)

(a) Zuerst berechnen wir die Bilder unter f der Basisvektoren $f(v_1), ..., f(v_n)$.

(b) Als nächstes bestimmen wir die Koordinatenvektoren $(\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi}) \in K^m$ von $f(v_i)$ $(i = 1, ..., n)$.

(c) Dann ist $A := (\alpha_{ij})_{1 \le j \le m}^{1 \le i \le n}$ die gesuchte Matrix:

$$\begin{aligned}
f(v_i) &= \alpha_{1i} w_1 + ... + \alpha_{mi} w_m \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}((\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi})) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A^{(i)}) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot e^{(i)}) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i)).
\end{aligned}$$

Die Abbildung liefert also auf einer Basis von V und damit auf ganz V das Gewünschte. $\Diamond$

Bemerkung 3.16

(1) Beim Nachweis in (c), dass $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f)$ ist, hätten wir auch umgekehrt vorgehen können:

$$\begin{aligned}
A \cdot e^{(i)} &= A^{(i)} \\
&= (\alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi}) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}(\alpha_{1i} w_1 + ... + \alpha_{mi} w_m) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}(f(v_i)) \\
&= \Psi_{\mathfrak{W}}(f(\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(e^{(i)}))) \\
&= (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) \\
&= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \cdot e^{(i)}.
\end{aligned}$$

Die Spalten von A stimmen also mit denen von $\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$ überein $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$.

(2) Sind $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ nicht selbst bereits die Vektorräume K^n, K^m, so erhalten wir **niemals** eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für $x \in V$! Das Ganze funktioniert dann nur mit Hilfe der Koordinatenabbildungen $\Psi_{\mathfrak{V}}, \Psi_{\mathfrak{W}}$. $\Diamond$

3.4 Basistransformation

Definition 3.17
Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ Basen von $\mathcal{V}$. Dann heißt

$$A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}'} \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})$$

die *Transformationsmatrix* bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$.

Bemerkung 3.18
(1) $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id})$ übersetzt also Koordinaten bzgl. der Basis $\mathfrak{V}$ in Koordinaten bzgl. $\mathfrak{V}'$.

(2) Das zugehörige Diagramm ist

$$\begin{tikzcd}
v_i \arrow[d] & \Psi_{\mathfrak{V}} & V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & V \arrow[d] & \Psi_{\mathfrak{V}'} & v_i' \arrow[d] \\
e^{(i)} & & K^n \arrow[r, "\mathrm{Lin}(A)"] & K^n & & e^{(i)}
\end{tikzcd}$$

(3) $A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}' & \mathfrak{V} & \mathfrak{V}' \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
K^n \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})"] & K^n \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id})"] & K^n \\
\mathfrak{E}_n & \mathfrak{E}_n & \mathfrak{E}_n
\end{tikzcd}$$

Die Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ ist also invers zur Transformationsmatrix bzgl. $\mathfrak{V}', \mathfrak{V}$.

(4) Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ endlichdimensionale $\mathcal{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ und seien $\mathfrak{V}', \mathfrak{W}'$ weitere Basen von $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. Sei weiter $f : V \to W$ ein Homomorphismus.

Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}' & \mathfrak{V} & \mathfrak{W} & \mathfrak{W}' \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
K^n \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})"] & K^n \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f)"] & K^m \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id})"] & K^m \\
\mathfrak{E}_n & \mathfrak{E}_n & \mathfrak{E}_m & \mathfrak{E}_m
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{W}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}).$$

(5) Seien speziell $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ zwei Basen von $\mathcal{V}$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, dann sind $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f),\ \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ ähnlich:

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot [\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id})]^{-1}.$$

(6) Seien speziell $\mathcal{V} = K^n,\ \mathcal{W} = K^m$ und $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{E}_m}(f) = \mathrm{Mat}(f)$.

Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ weitere Basen von K^n, K^m, dann gilt $(\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}),\ \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{W}}(\mathrm{id}))$

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}) \cdot \mathrm{Mat}(f) \cdot \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}})^{-1}.$$

Sei $x \in K^n$ beliebig, dann gilt $f(x) = A \cdot x$ mit der Matrix

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(f) \cdot \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}). \qquad \Diamond$$