# 4 Bonusaufgaben II

## 4.1 Vektorräume und lineare Abbildungen

$\ast$-**Aufgabe 5**

(1) Lösen Sie das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} X_1 & + & X_2 & & & + & 2X_4 & & & + & 4X_6 & = & 8 \\ 2X_1 & + & 2X_2 & & & + & 4X_4 & & & + & 8X_6 & = & 16 \\ & & & & X_3 & - & 5X_4 & & & + & 7X_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & X_5 & + & X_6 & = & 3 \\ & & & & & & & - & X_5 & - & X_6 & = & -3 \end{array}\right. \qquad (+)$$

(2) Invertieren Sie die folgende Matrix über $\mathbb{F}_2$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

$\ast$-**Aufgabe 6**

Berechnen Sie sämtliche Potenzen $A^n, B^n, C^n$ der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -9 & -25 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

$\ast$-**Aufgabe 7**

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Seien $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$. Dann definiert $f(V')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{W}$ und $f^{-1}(W')$ einen Untervektorraum von $\mathcal{V}$.

(2) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $f(V) = \operatorname{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$.

Ist $f$ injektiv, dann ist $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ eine Basis von $f(V)$.

(3) Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Seien $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \to W$, so dass gilt $f(v_1) = w_1, \; ..., \; f(v_n) = w_n$.

(4 Punkte)

$\ast$-**Aufgabe 8**

(1) Seien $\mathcal{V} := \mathbb{R}^3$ mit der Basis $\mathfrak{V} := (v_1, v_2, v_3) := ((1, 0, -1), \; (1, 1, 1), \; (1, 0, 0))$ und $\mathcal{W} := \mathbb{R}^2$ mit der Basis $\mathfrak{W} := (w_1, w_2) := ((0, 1), \; (1, 0))$ versehen.

Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f((x_1, x_2, x_3)) := (x_1 + x_2, \; 2x_3 - x_1)$.

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\operatorname{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f)$ von $f$ bzgl. den Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

(2) Wir versehen den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathfrak{V} := ((1, 1), \; (1, 2))$ und $\mathfrak{W} := ((0, 1), \; (-1, 1))$.

Berechnen Sie die Matrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{W}$ vermittelt (also $\operatorname{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$).

(4 Punkte)

(freiwilliger) **Abgabetermin**:
25.01.2010