4.2 Lösungen

Lösung 5

(1) **Schritt 1:** Berechnung der reduzierten Zeilenstufenform der Darstellungsmatrix zu (+):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist (+) lösbar, das zugehörige homogene System $(*)$ besitzt $n - r = 6 - 3 = 3$ Basislösungen.

Schritt 2: Lösung des homogenen Systems $(*)$:

$$\mathbb{L}_* = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{array}{c} (-1,1,0,0,0,0), \\ (-2,0,5,1,0,0), \\ (-4,0,-7,0,-1,1) \end{array}\right\}\right).$$

Schritt 3: Eine spezielle Lösung von (+) ist $x' := (8,0,2,0,3,0)$, also ist die Lösungsmenge von (+)

$$\mathbb{L}_+ = x' + \mathbb{L}_*.$$

(2) Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix zu A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Lösung 6

(1) Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} -36 & -48 & -48 \\ -18 & -24 & -24 \\ 45 & 60 & 60 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also auch $A^n = 0$ für alle $n \geq 3$.

(2) Wegen

$$B^2 = \begin{pmatrix} -9 & -25 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = B$$

gilt $B^n = B$ für alle $n \geq 1$.

(3) Aus

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad ...$$

sieht man, dass die Einträge von C^n Folgeglieder der Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, ...)$ sind.

Beweis per Induktion:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}.$$

Gelte die Behauptung also für n, dann

$$C^n = C^{n-1} \cdot C = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} & f_n \\ f_{n-1} + f_{n-2} & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Lösung 7

(1) $f(V')$ ist ein Unterraum von $\mathcal{W}$:

(a) $0 \in V' \Rightarrow 0 = f(0) \in f(V')$.

(b) Seien $x, y \in f(V')$, dann gibt es $v, w \in V'$ mit $f(v) = x,\ f(w) = y$. Da V' Unterraum von $\mathcal{V}$, folgt $v + w \in V' \Rightarrow x + y = f(v) + f(w) = f(v + w) \in f(V')$.

(c) Seien $x \in f(V'),\ \alpha \in K$, dann gibt es $v \in V'$ mit $f(v) = x$. Da V' Unterraum von $\mathcal{V}$, folgt $\alpha v \in V' \Rightarrow \alpha x = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in f(V')$. $\diamondsuit$

$f^{-1}(W')$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}$:

(a) $0 \in W' \Rightarrow 0 \in f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(W') \Rightarrow 0 \in f^{-1}(W')$.

(b) Seien $x, y \in f^{-1}(W')$, dann liegen $f(x), f(y)$ in W'. Da W' ein Unterraum von $\mathcal{W}$ ist, folgt $f(x + y) = f(x) + f(y) \in W' \Rightarrow x + y \in f^{-1}(W')$.

(c) Seien $x \in f^{-1}(W'),\ \alpha \in K$, dann liegt $f(x)$ in W'. Da W' ein Unterraum von $\mathcal{W}$ ist, folgt $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in W' \Rightarrow \alpha x \in f^{-1}(W')$. $\diamondsuit$

(2) Sei $x \in f(V)$, dann gibt es $v \in V$ mit $f(v) = x$. Da $\mathfrak{V}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, gibt es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, also $x = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) \in \mathrm{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$. Also ist $f(V) = \mathrm{span}(\{f(v_1), ..., f(v_n)\})$. $\diamondsuit$

Sei nun f injektiv. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0$, dann $f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$; da $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$. Da $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, müssen dann schon $\alpha_1 = 0,\ ...,\ \alpha_n = 0$ sein. Also ist auch $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig. $\diamondsuit$

(3) Sei $v \in V$ beliebig, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ die (eindeutigen) Skalare mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Wir definieren $f : V \to W$ durch $f(v) := \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$.

(a) Da W Vektorraum, gilt $f(v) \in W$, d.h. f ist wohldefiniert.

(b) Seien $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$, dazu $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ und $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ mit $w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha v + \beta w) &= f(\alpha(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)) \\ &= f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n \\ &= \alpha(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n) \\ &= \alpha f(v) + \beta f(w). \end{aligned}$$

Also ist f linear.

(c) f ist eindeutig: Sei g ein weiterer solcher Homomorphismus. Sei $v \in V,\ v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, dann

$$g(v) = g(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 g(v_1) + ... + \alpha_n g(v_n) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n = f(v).$$

Also stimmen f, g überein. $\square$

Lösung 8

(1) **Möglichkeit 1:** Nach (3.18.6) gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f) &= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \\
&= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})\mathrm{Mat}(f)(\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}))^{-1} \\
&= [(\Psi_{\mathfrak{W}}(e^{(1)}), \Psi_{\mathfrak{W}}(w^{(2)}))^{-1}][f(e^{(1)}), f(e^{(2)}), f(e^{(3)})][\Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(1)}), \Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(2)}), \Psi_{\mathfrak{V}}(e^{(3)})] \\
&= [(w_1, w_2)^{-1}][f(e^{(1)}), f(e^{(2)}), f(e^{(3)})][v_1, v_2, v_2] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Nach (3.15):

(a) Berechnung der Bilder unter f der Basisvektoren:

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Koordinatenvektoren dieser Bilder bzgl. $\mathfrak{W}$:

$$f(v_1) = -3w_1 + 1w_2, \qquad f(v_2) = 1w_1 + 2w_2, \qquad f(v_3) = -1w_1 + 1w_2.$$

(c) Darstellungsmatrix von f bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$:

$$\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Berechnung der Transformationsmatrix:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}) &= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) \\
&= \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})$ haben wir wieder (3.7) benutzt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□