5 Eigenwerttheorie

5.1 Die Determinantenabbildung

Definition 5.1

Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\underset{n}{\det}(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \underset{n-1}{\det} A_{i_0 j} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i j_0} \underset{n-1}{\det} A_{i j_0} \right)$$

die *Determinante* von A (wobei $\underset{1}{\det}(A) = \underset{1}{\det}((a)) := a$).
$A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ bezeichnet dabei diejenige Matrix, die aus A nach Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Bemerkung 5.2

(1) $\det := \underset{n}{\det}$ definiert eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \to K$. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

(a) det ist *multilinear (linear in jeder Zeile)*, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha A_i' + \beta A_i'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(b) det ist *alternierend*, d.h. gibt es $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, mit $A_i = A_j$, dann $\det(A) = 0$.

(c) det ist *normiert*, d.h. $\det(\mathrm{Id}) = 1$.

(d) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert wird.

(e) $\det(A)$ ändert (nur) sein Vorzeichen, wenn zwei Zeilen von A vertauscht werden.

(2) Die Eigenschaften (a),(b),(c) *charakterisieren* det, d.h. es gibt (zu jedem n) genau eine Abbildung $K^{n\times n} \to K$, die multilinear, alternierend und normiert ist (Hauptsatz der Determinantentheorie).

(3) Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gelten $\det(A^T) = \det(A)$ und $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(4) Seien $C \in K^{m\times m}$ und $C' \in K^{m'\times m'}$. Dann gilt:

$$\underset{m+m'}{\det} \left(\begin{array}{c|c} C & * \\ \hline 0 & C' \end{array}\right) = \underset{m}{\det}(C) \cdot \underset{m'}{\det}(C') \qquad \text{und insbesondere} \qquad \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n.$$

(5) Spezielle Entwicklungsformeln:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc; \qquad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = (aB'c'' + a'b''c + a''bc') - (a''b'c + a'bc'' + ab''c').$$

(6) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. Die Inverse zu A ist dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [(-1)^{i+j} \det(A_{ji})]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} =: \frac{A^\#}{\det(A)}.$$

$A^\#$ heißt die *adjungierte Matrix* zu A.

Speziell für (2×2)-Matrizen gilt also:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(7) Nach (3): $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ und $\det(A^\#) = \det(A)^{n-1}$ (insbes. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A^\#) = 0$). $\diamond$

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.3

Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Existieren $v \in V \setminus \{0\}$ und $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda v$, dann heißt λ ein *Eigenwert* von f und v ein zu λ gehöriger *Eigenvektor*.

Bemerkung 5.4

(1) Sei λ ein Eigenwert von f, dann heißt $\mathrm{Eig}(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \subseteq \mathcal{V}$ der *Eigenraum* zu λ.

(2) Wir sagen, ein $A \in K^{n\times n}$ hat *Diagonalgestalt*, falls $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. ◊

Satz 5.5 (Hauptsatz)

$\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ ist eine Basis aus Eigenvektoren zu $f \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ hat Diagonalgestalt.

In dem Fall gilt $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit λ_i Eigenwert zu v_i.

Beweis

$\Rightarrow$: Wir müssen zeigen, dass für die i-te Spalte von A gilt $A^{(i)} = \lambda_i e^{(i)}$.

$$A^{(i)} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot e^{(i)} = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ f)(v_i) = \Psi_{\mathfrak{V}}(\lambda_i v_i) = \lambda_i \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i) = \lambda_i e^{(i)}.$$

$\Leftarrow$: Wir müssen zeigen, dass $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

$$f(v_i) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(v_i)) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot e^{(i)}) = \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(\lambda_i e^{(i)}) = \lambda_i \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}(e^{(i)}) = \lambda_i v_i. \quad \square$$

Bemerkung 5.6

(1) Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig.

Insbesondere kann es nicht mehr als n paarweise verschiedene Eigenwerte geben. Zu einem Eigenwert können aber mehrere linear unabhängige Eigenvektoren existieren.

Wir bezeichnen $\mu_g(\lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\lambda)$ als die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ.

(2) λ ist ein Eigenwert zu $f \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

(3) Sei $A \in K^{n\times n}$, dann heißt λ ein *Eigenwert* von A, falls es ein $v \in K^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$. v heißt dann ein *Eigenvektor* zu A.

(4) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \sim B$, dann sind die Eigenwerte von A gleich den Eigenwerten von B:

$$Av = \lambda v \Rightarrow B(Cv) = CAC^{-1}(Cv) = C(Av) = C(\lambda v) = \lambda(Cv),$$

d.h. ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist Cv ein Eigenvektor von B zu λ.

Insbesondere sind Eigenwerte invariant unter Basistransformation (im Gegensatz zu den zugehörigen Eigenvektoren).

Weiter sind die Eigenwerte von $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ gerade diejenigen von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ für eine beliebige Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathcal{V}$.

Entsprechend sind die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$ gleich denen von $\mathrm{Lin}(A) : K^n \to K^n$.

(5) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dann setzen wir $\det(f) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))$.

Die Definition ist unabhängig von der gewählten Basis: Sei $\mathfrak{V}'$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$, dann

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f)) = \det(C \cdot \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \cdot C^{-1}) = \det(C)\det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))[\det(C)]^{-1} = \det(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)).$$

(6) λ ist ein Eigenwert zu $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{id}) = 0$. ◊

5.3 Das charakteristische Polynom

Definition 5.7

Sei $A \in K^{n\times n}$, dann heißt $\chi(A) := \det(A - t\mathrm{Id})$ das *charakteristische Polynom* zu A.

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dann heißt $\chi(f) := \chi(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f))$ das *charakteristische Polynom* zu f.

Bemerkung 5.8

(1) Nach 5.6.5 ist $\chi(f)$ unabhängig von der gewählten Basis $\mathfrak{V}$.

(2) Setzt man $\mathrm{spur}(A) := a_{11} + a_{22} ... + a_{nn}$ (*Spur* von A), dann hat $\chi(A)$ die Darstellung

$$\chi(A)(t) = (-t)^n + \mathrm{spur}(A)(-t)^{n-1} + ... + \det(A).$$

Insbesondere ist die Spur ebenso wie die Determinante invariant unter Ähnlichkeitstransformation.

(3) Nach 5.6.6 sind die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen von $\chi(A)$.

(4) Sei $V = \mathbb{R}^{2m+1}$, dann hat jedes $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ mindestens einen Eigenwert (denn nach dem Zwischenwertsatz hat $\chi(f)$ mindestens eine Nullstelle).

(5) Sei $\chi(f)(\lambda) = 0$. Die Anzahl $\mu_a(\lambda)$ an Linearfaktoren $(t - \lambda)$, die sich von $\chi(f)$ abspalten lässt, heißt die *algebraische Vielfachheit* von λ. Es gilt stets $\mu_a(\lambda) \geq \mu_g(\lambda)$.

(6) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann zerfällt $\chi(A)$ zwar über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren (Fundamentalsatz der Algebra), aber $\mathbb{C}^n$ besitzt nur dann eine Basis aus Eigenvektoren zu A, wenn für jeden Eigenwert λ von A gilt $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein sehr tiefliegendes Resultat, das zum ersten Mal (mit analytischen Methoden) 1799 von Carl Friedrich Gauß im Rahmen seiner Dissertiation gegeben wurde. Es existieren inzwischen zahlreiche Beweisvarianten aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik, zum Beispiel über *Holomorphieargumente* (Funktionentheorie), *Homotopien* (Topologie) oder *Galois-Theorie* (Algebra).

(7) Die Berechnung des charakteristischen Polynoms kann bei großen Matrizen (auch numerisch) sehr aufwendig sein. Die Berechnung der (komplexen) Nullstellen eines Polynoms *(Auflösung in Wurzeln)* ist nicht einmal immer möglich; neben der allseits bekannten Formel für quadratische Gleichungen existieren zwar auch Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades *(Cardano & Ferrari, 1545)*; eine Formel für Gleichungen fünften Grades kann aber beispielsweise nicht existieren *(Nichtauflösbarkeit der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$, Abel, 1826)*. ◊

Satz 5.9 (Hamilton-Cayley)

Seien $A \in K^{n\times n}$ bzw. $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dann gelten $\chi(f)(f) = 0$ bzw. $\chi(A)(A) = 0$.

Bemerkung 5.10

Wegen $\chi(A) = \det(A - t\mathrm{Id})$ mag es auf den ersten Blick trivial erscheinen, dass $\chi(A)(A) = \det(0) = 0$. Allerdings vertauscht die Berechnung der Determinante (in t) nicht mit der Einsetzung von A in t: Man sieht sofort, dass nicht einmal die resultierenden Objekte passen, denn $\det(0) = 0 \in K$, aber $\chi(A)(A) = 0 \in K^{n\times n}$. ◊

Korollar 5.11

(1) Sei $A \in K^{n\times n}$, dann ist $\mathrm{span}(\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subseteq K^{n\times n}$ höchstens n-dimensional.

(2) Sei A invertierbar, dann ist $A^{-1} \in \mathrm{span}(\{A^1, ..., A^{n-1}\})$ mit

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_2 A + a_1 \mathrm{Id}),$$

wobei $a_1, ..., a_{n-1}$ die Koeffizienten von $\chi(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$.

5.4 Diagonalisierung und Trigonalisierung

Definition 5.12

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Diagonalmatrix B gibt mit $A \sim B$.

$f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathcal{V}$ existiert, so dass $\operatorname{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Bemerkung 5.13

(1) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\operatorname{Lin}(A) \in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$ diagonalisierbar ist.

(2) Drehmatrizen zum Winkel $\theta \neq 0, \pi$ haben keine reellen Eigenwerte, sind aber über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar: Sei $A := \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$, dann gilt

$$\det(A-\lambda\mathrm{id}) = 0 \Leftrightarrow (\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0 \Leftrightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta},$$

d.h. A besitzt zwei Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}^2$ damit eine Basis aus Eigenvektoren zu A.

(3) Nicht alle Matrizen sind (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar (und damit erst recht nicht über $\mathbb{R}$). Betrachte etwa die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, dann gilt

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda v_1\\ \lambda v_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} v_1+v_2 & = & \lambda v_1\\ v_2 & = & \lambda v_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda = 1,\ v \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right).$$

Also hat A über $\mathbb{R}$ (und auch über $\mathbb{C}$) nur einen Eigenwert $\lambda = 1$ mit doppelter algebraischer Vielfachheit $\mu_a(\lambda) = 2$, aber nur einfacher geometrischer Vielfachheit $\mu_g(\lambda) = 1$. Insbesondere besitzen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}^2$ keine Basis aus Eigenvektoren zu A. $\Diamond$

Satz 5.14

Seien $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{K}$-Vektorraum und $f \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar;

(b) $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis $\mathfrak{V}$ mit $\operatorname{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

(c) $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis $\mathfrak{V}$ aus Eigenvektoren zu f;

(d) $\chi(f)$ zerfällt über K in Linearfaktoren und für alle Nullstellen λ von $\chi(f)$ gilt $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

(e) Es gibt Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ zu f mit $\mathcal{V} = \operatorname{Eig}(\lambda_1) \oplus ... \oplus \operatorname{Eig}(\lambda_k)$.

Bemerkung 5.15

Wir nennen $A \in K^{n\times n}$ eine *Trigonalmatrix*, falls $A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$. $\Diamond$

Definition 5.16

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *trigonalisierbar*, falls es eine Trigonalmatrix B gibt mit $A \sim B$.

$f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ heißt *trigonalisierbar*, falls eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathcal{V}$ existiert, so dass $\operatorname{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Trigonalgestalt hat.

Bemerkung 5.17

(1) Genau dann ist eine Matrix A trigonalisierbar, wenn $\chi(A)$ in Linearfaktoren zerfällt. Die Eigenwerte von A sind dann gerade die Diagonalelemente der Trigonalmatrix zu A.

(2) Insbesondere ist jede Matrix über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar. $\Diamond$