6 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.1 Räume mit Skalarprodukt

Definition 6.1

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in \mathcal{V}$. Erfüllt eine Abbildung $s(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} s(\alpha x + \beta y, z) &= \overline{\alpha} s(x, z) + \overline{\beta} s(y, z) \quad \text{und} \\ s(x, y) &= \overline{s(y, x)}, \end{aligned}$$

dann heißt s eine *Bilinearform (Hermitesche Form)* auf $\mathcal{V}$.

Ist s zusätzlich *positiv definit*, d.h. $s(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$, dann heißt s ein *Skalarprodukt* auf $\mathcal{V}$. Wir schreiben dann $s := \langle \cdot, \cdot \rangle$ und wir nennen $\mathcal{V}$ einen *euklidischen (unitären) Vektorraum*.

Bemerkung 6.2

(1) Bilinearformen bzw. Hermitesche Formen sind stets linear in der zweiten Komponenten:

$$s(x, \alpha y + \beta z) = \overline{s(\alpha y + \beta z, x)} = \alpha \overline{s(y, x)} + \beta \overline{s(z, x)} = \alpha s(x, y) + \beta s(x, z).$$

(2) Ein Skalarprodukt induziert stets eine *Norm* auf $\mathcal{V}$: Definiere $||\cdot|| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\boxed{||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}} \quad (x \in \mathcal{V}),$$

dann gelten für alle $x \in \mathcal{V}$:

$$||x|| = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad ||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||, \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

(3) Eine Norm wiederum induziert stets eine *Metrik* auf $\mathcal{V}$: Definiere $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{d(x, y) := ||x - y||} \quad (x, y \in \mathcal{V}),$$

dann gelten für alle $x, y, z \in \mathcal{V}$:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad d(x, y) = d(y, x), \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(4) Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$||x - y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2.$$

(5) Es gilt die Parallelogrammregel:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

(6) Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y|| \qquad \text{und} \qquad |\langle x, y \rangle| = ||x|| \, ||y|| \Leftrightarrow x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

(7) Wir nennen x, y *orthogonal* (in Zeichen: $x \perp y$), falls gilt $\langle x, y \rangle = 0$.

(8) Ist $\mathcal{V}$ euklidisch, dann induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine *Winkelfunktion* $\varphi := \sphericalangle(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, \pi]$ implizit durch

$$\boxed{\cos(\varphi) := \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||}} \qquad (x, y \in \mathcal{V}).$$

Da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||} \in [-1, 1]$ und $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist, ist $\sphericalangle(x, y)$ wohldefiniert. $\lozenge$

6.2 Orthogonalräume

Bemerkung 6.3 (Direkte Summen)

(1) Seien zunächst allgemein $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum und $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V}$. Dann definieren auch $U + W := \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$ und $U \cap W$ Unterräume von $\mathcal{V}$, die wir mit $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ bezeichnen.

(2) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$, dann heißt $\mathcal{V}$ die *direkte Summe* von $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ ($\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$).

(3) Ist $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, dann lässt sich **jedes** $v \in \mathcal{V}$ **eindeutig** zerlegen in $v = u + w$ mit $u \in U,\ w \in W$.

Die *Projektionen* $\pi_U : V \to U,\ v \mapsto u$ und $\pi_W : V \to W,\ v \mapsto w$ sind surjektiv und linear.

(4) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, dann existiert genau ein $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Sei $\mathfrak{U}$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Nach dem Basisergänzungssatz existiert dann eine endliche, linear unabhängige Teilmenge $\mathfrak{W}$ von V, so dass $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ bildet. Dann ist $\mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathcal{W}$.

Insbesondere gilt die Erste Dimensionsformel: $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

(5) Seien $\mathcal{V}, \mathcal{X}$ zwei $\mathcal{K}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, X)$. Seien $\mathfrak{U}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathfrak{X}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathcal{X}$. Dann ist $\mathfrak{W} := f^{-1}(\mathfrak{X}) \subseteq V$ Basis eines Unterraumes $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathfrak{W} \cup \mathfrak{U}$ bildet eine Basis von $\mathcal{V}$, d.h. $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Insbesondere gilt die Zweite Dimensionsformel: $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

(6) Seien $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ und $f \in \mathrm{Hom}(U, V),\ g \in \mathrm{Hom}(W, V)$. Dann existiert genau eine gemeinsame lineare Fortsetzung $h : V \to V$, d.h. genau ein $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $h|_U = f$ und $h|_W = g$.

Definition 6.4

Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $s = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$.

$\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ heißt ein *Orthogonalsystem*, falls $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$, und ein *Orthonormalsystem*, falls zusätzlich $||v_i|| = s(v_i, v_i) = 1$ für alle i.

Entsprechend heißt eine Basis $\mathfrak{O}$ von $\mathcal{V}$ *Orthogonalbasis* bzw. *Orthonormalbasis*, falls sie ein Orthogonalsystem bzw. ein Orthonormalsystem von $\mathcal{V}$ bildet.

Bemerkung 6.5 (Orthogonalsysteme)

(1) Sei $\mathfrak{O} := \{v_1, ..., v_m\}$ ein Orthogonalsystem. Dann ist $\mathfrak{O}$ linear unabhängig: Sei $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$, dann gilt für beliebiges $i \in \{1, ..., m\}$:

$$0 = \langle v_i, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m \rangle = \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle + ... + \alpha_m \langle v_i, v_m \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = 0.$$

(2) Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt: Sei $\mathfrak{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist $\mathfrak{O} := \{w_1, ..., w_n\}$ mit

$$w_1 := \frac{v_1}{||v_1||}, \qquad w_{m+1} := \frac{w'_{m+1}}{||w'_{m+1}||}, \qquad w'_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v_{m+1} \rangle v_i$$

eine Orthobormalbasis von $\mathfrak{V}$.

(3) Seien $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Wir schreiben $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}$, falls $u \perp w$ für alle $u \in U,\ w \in \mathcal{W}$, und $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus\!\!\!\perp \mathcal{W}$, falls $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}$ und $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$. $\mathcal{V}$ heißt dann die *orthogonale Summe* von $\mathcal{U}, \mathcal{W}$.

Orthogonale Summen sind immer direkt, d.h. $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus\!\!\!\perp \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

(4) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Dann definiert auch $\mathcal{U}^\perp := \{v \in V \mid v \perp u\}$ einen Unterraum von $\mathcal{V}$, den *Orthogonalraum* zu $\mathcal{U}$. Es gelten dann $\mathcal{U} \perp \mathcal{U}^\perp$ und $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus\!\!\!\perp \mathcal{U}^\perp$.

(5) Gelte nur $M \subseteq V$, dann ist dennoch $M^\perp \subseteq \mathcal{V}$ und es gilt $M^\perp = (\mathrm{span}(M))^\perp$.

(6) Sei $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der kanonische euklidische Raum. Sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^n$ der Zeilenraum eines homogenen, linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{L} = \mathcal{Z}^\perp$ (da $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = x \bullet y$).

In $\mathbb{C}$ stimmt das nicht (denn dort ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht $\bullet$, sondern die Hermitesche Form). $\Diamond$

6.3 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Bemerkung 6.6

(1) Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum. $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ heißt ein *Endomorphismus* von $\mathcal{V}$ (in Zeichen: $f \in \mathrm{End}(V)$).

(2) Die Menge der invertierbaren Endomorphismen von $\mathcal{V}$ bildet eine Gruppe, die wir mit $\mathrm{GL}(V)$ bezeichnen. $\Diamond$

Definition 6.7

Sei $(\mathcal{V}, s)$ ein n-dimensionaler, euklidischer (unitärer) Raum.

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *orthogonal (unitär)*, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $s(f(v), f(w)) = s(v, w)$.

Bemerkung 6.8

(1) Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \;\Leftrightarrow\; \forall v \in V : ||f(v)|| = ||v|| \;\Leftrightarrow\; ||v|| = 1 \Rightarrow ||f(v)|| = 1.$$

(2) Die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf $\mathcal{V}$ bilden bzgl. $\circ$ eine Untergruppe $\mathrm{O}(V)$ von $\mathrm{GL}(V)$, die *orthogonale (unitäre) Gruppe* auf $(\mathcal{V}, s)$:

(a) Seien $f, g \in \mathrm{O}(V)$, dann $||(f \circ g)(v)|| = ||f(g(v))|| = ||g(v)|| = ||v||$ für alle $v \in V$, d.h. $f \circ g \in \mathrm{O}(V)$.

(b) Wegen $f(v) = 0 \Rightarrow ||f(v)|| = 0 \Rightarrow ||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$ ist $f \in \mathrm{O}(V)$ stets injektiv, also (in $\mathrm{End}(V)$) invertierbar. Außerdem ist $||f^{-1}(v)|| = ||f(f^{-1}(v))|| = ||v||$ für alle $v \in V$, d.h. $f^{-1} \in \mathrm{O}(V)$.

(3) λ Eigenwert von $f \in \mathrm{O}(V) \Rightarrow |\lambda| = 1$, denn für $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ gilt $|\lambda| = \frac{||f(v)||}{||v||} = 1$.

(4) Seien $\mathfrak{O} := (v_1, ..., v_n)$ Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathfrak{W} := (f(v_1), ..., f(v_n))$. Dann gilt:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \Leftrightarrow \mathfrak{W} \text{ ist eine Orthonormalbasis von } \mathcal{V}.$$ $\Diamond$

Definition 6.9

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *orthogonal (unitär)*, falls A invertierbar ist mit $A^{-1} = \overline{A^T}$.

Bemerkung 6.10

(1) Die orthogonalen bzw. unitären $(n \times n)$-Matrizen bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(n)$ von $\mathrm{GL}(n)$, die *orthogonale (unitäre) Gruppe*.

(2) Seien $\mathfrak{O}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

$$f \text{ ist orthogonal (unitär)} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{O}}(f) \text{ ist orthogonal (unitär)}.$$

(3) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist orthogonal (unitär) $\Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

(4) $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1$, denn $1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(A\overline{A^T}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$. $\Diamond$

Satz 6.11 (Normalform unitärer Endomorphismen)

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ unitär. Dann besitzt $\mathcal{V}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu f.

Beweis

Per Induktion über $\dim(V) = n$: $\chi(f)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Sei $\chi(\lambda_1) = 0$ und v_1 normierter Eigenvektor zu λ_1, dann $\mathcal{V} = \mathrm{span}(v_1) \oplus \mathrm{span}(v_1)^\perp =: \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ und $f|_W : W \to W$. Wir zeigen, dass $f|_U : U \to U$. Sei dazu $u \in U$, dann $0 = \langle v_1, u\rangle = \langle f(v_1), f(u)\rangle = \overline{\lambda_1}\langle v_1, f(u)\rangle$, also auch $f(u) \in U$.

Wegen $\dim(\mathcal{U}) = n - 1$ liefert die Ind.vor. dann, dass $\mathcal{U}$ eine Orthonormalbasis $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren zu f besitzt; wegen $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ ist damit $\mathfrak{V} := (v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ aus Eigenvektoren zu f. $\square$

Korollar 6.12 (Normalform unitärer Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, dann gibt es ein unitäres $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = CB\overline{C^T}$, $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $|\lambda_i| = 1$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

Beweis

Setze $f := \operatorname{Lin}(A)$, dann ist $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ nach 6.10.2 unitär, nach 6.11 gibt es also eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O}$ aus Eigenvektoren zu f. Damit ist

$$\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})\operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{E}}(f)\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})^{-1} = \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})\operatorname{Mat}(f)\operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{O}}(\mathrm{id}) = \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

und nach 6.8.3 gilt $|\lambda_i| = 1$ für alle i. Nach 6.10.3 ist $\operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})$ unitär und wegen $A = \operatorname{Mat}(f)$ folgt mit $B := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f)$, $C := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{O}}(\mathrm{id})$ die Behauptung. $\square$

Satz 6.13 (Normalform orthogonaler Endomorphismen)

Zu $\theta_i \in [0, 2\pi)$ bezeichne $D_i := \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{smallmatrix}\right)$ die Drehmatrix (in $\mathbb{R}^2$) um den Winkel θ_i.

Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Für geeignete r, s, t und passende $\theta_1, ..., \theta_t$ lässt $\operatorname{Mat}(f)$ sich dann auf folgende Gestalt transformieren:

$$\operatorname{Mat}(A) \sim \left(\begin{array}{c|c|c} +\mathrm{Id}(r) & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{Id}(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{D}(t) \end{array}\right)$$

mit $\mathrm{Id}(r) := \mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\mathrm{Id}(s) = \mathbb{R}^{s\times s}$ und $\mathrm{D}(t) := \operatorname{diag}(D_1, ..., D_t)$.

Beweis

Der euklidische Fall ist schwieriger zu behandeln, da das charakteristische Polynom $\chi(f)$ eines orthogonalen Endomorphismus f nicht immer in Linearfaktoren zerfällt (und damit f nicht diagonalisierbar sein muss).

(1) $\mathcal{V}$ besitzt einen f-invarianten Unterraum $\mathcal{W}$ der Dimension $\dim(\mathcal{W}) \in \{1, 2\}$:

Hat $\chi(f)$ eine reelle Nullstelle λ_1, dann sei $\mathcal{W}$ der von einem zugehörigen Eigemvektor v_1 aufgespannte Unterraum. Dann ist $f(W) = \lambda_1 W \subseteq W$ und $\dim(\mathcal{W}) = 1$.

Andernfalls betrachte $\chi(f) = \chi_1 \cdot ... \cdot \chi_k$ mit $\deg(\chi_i) = 2$. Setze außerdem $\chi_0 := \mathrm{id}$. Nach Hamilton-Cayley ist dann $\chi(f)(f) = \chi_k(f) \circ ... \circ \chi_1(f) = 0$.

Wähle $w \neq 0$ und $i \in \{1, ..., k\}$ mit $v := (\chi_{i-1}(f) \circ ... \circ \chi_0(f))(w) \neq 0$ und $\chi_i(f)(v) = 0$. $\chi_i(f)$ hat die Gestalt $f^2 + \alpha f + \beta\mathrm{id}$, also folgt aus $\chi_i(f)(v) = 0$, dass $f(f(v)) = -\alpha f(v) - \beta(v) \in \operatorname{span}(v, f(v)) =: W$. Dann sind $f(v), f(f(v)) \in W$, d.h. $\mathcal{W}$ ist f-invariant. Außerdem $\dim(\mathcal{W}) \leq 2$.

(2) $\mathcal{V}$ besitzt f-invariante $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \bigoplus ... \bigoplus \mathcal{U}_m$ und $\dim(\mathcal{U}_i) \in \{1, 2\}$:

Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ f-invariant mit $\dim(\mathcal{W}) \in \{1, 2\}$. Analog zum unitären Fall zeigen wir, dass $\mathcal{W}^\perp$ ebenfalls f-invariant ist. Nach Ind.vor. besitzt $\mathcal{W}^\perp$ bereits die gewünschte Zerlegung in f-invariante Unterräume der Dimensionen $1, 2$, also dann auch $\mathcal{V} = \mathcal{W} \bigoplus \mathcal{W}^\perp$.

(3) Nach (2) können wir Œ annehmen, dass $\dim(\mathcal{V}) \in \{1, 2\}$. Im Fall $\dim(\mathcal{V}) = 1$ ist $\mathcal{V} = \operatorname{span}(v)$ mit $v \neq 0$ Eigenvektor zu f zu einem Eigenwert $\lambda = \pm 1$ und wir erhalten den gewünschten Eintrag ± 1 in $\mathrm{Id}(r)$ bzw. $-\mathrm{Id}(s)$.

Im Fall $\dim(\mathcal{V}) = 2$ wähle eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O} = (v_1, v_2)$ von $\mathcal{V}$, dann ist $A := \operatorname{Mat}^{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{O}}(f)$ orthogonal, d.h. $AA^T = \mathrm{Id}$. Komponentenweise Betrachtung dieser Bedingung liefert für geeignetes $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$A \sim \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A \sim \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}+1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$\square$

Korollar 6.14 (Normalform orthogonaler Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann gibt es $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = CBC^T$ und $B = \operatorname{diag}(+\mathrm{Id}(r), -\mathrm{Id}(s), \mathrm{D}(t))$.

6.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 6.15

Sei $(\mathcal{V}, s)$ euklidisch (unitär). $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt *selbstadjungiert* $:\Leftrightarrow \forall v, w \in V : s(f(v), w) = s(v, f(w))$.

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch (Hermitesch)*, falls $A = \overline{A^T}$.

Bemerkung 6.16

(1) Seien $\mathfrak{D} = (v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, $v, w \in V$ und $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ die Koordinatenvektoren von v, w. Dann gilt $s(v, w) = \langle x, y\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$):

$$s(v, w) = s\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n s(x_i v_i, x_j v_j) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i y_i = \langle x, y\rangle.$$

(2) Sei $A = \operatorname{Mat}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}}(f)$, dann sind Ax, Ay die Koordinatenvektoren von $f(v), f(w)$ bzgl. $\mathfrak{D}$, d.h.

$$\begin{aligned} f \text{ ist selbstadjungiert} &\Leftrightarrow \forall v, w \in V : s(f(v), w) = s(v, f(w)) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{K}^n : \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{K}^n : \langle Ax, y\rangle = \langle \overline{A^T} x, y\rangle \\ &\Leftrightarrow A \text{ ist selbstadjungiert.} \end{aligned}$$

Also: Ist $\mathfrak{D}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{V}, s)$, dann ist $f \in \operatorname{End}(V)$ genau dann selbstadjungiert, wenn $\operatorname{Mat}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}}(f) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert ist. $\Diamond$

Satz 6.17 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)

Seien $(\mathcal{V}, s)$ ein euklidischer (unitärer), n-dimensionaler Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert.

Dann besitzt $\mathcal{V}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu f und alle Eigenwerte von f sind reell.

Beweis

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi(f)$ und $x \neq 0$ mit $f(x) = \lambda x$, dann gilt

$$\lambda s(x, x) = s(x, \lambda x) = s(x, f(x)) = s(f(x), x) = s(\lambda x, x) = \overline{\lambda} s(x, x) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \overline{\lambda},$$

also $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach dem Fundamentalsatz ist also $\chi(f) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ über $\mathbb{R}$.

(2) Wie üblich per Induktion: Sei λ_1 Eigenwert von f zum normierten Eigenvektor v_1, dann definiere $\mathcal{U} := \operatorname{span}(v_1)$. $\mathcal{U}$ ist f-invariant und wir müssen zeigen, dass auch $\mathcal{U}^\perp$ f-invariant ist. Seien dazu $v \in U^\perp$, $u \in U$, dann gilt $s(f(v), u) = s(v, f(u)) = 0$, also $f(v) \perp u$, d.h. $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Nach Ind.vor. besitzt $\mathcal{U}^\perp$ nun eine Orthonormalbasis $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren zu $f|_{\mathcal{U}^\perp}$, also ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V} = \mathcal{U} \mathbin{\bigcirc\kern-0.8em\perp} \mathcal{U}^\perp$. $\square$

Korollar 6.18 (Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, dann gibt es $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = CB\overline{C^T}$, $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.