7 Ergänzungen

7.1 Ein Beispiel aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Definition 7.1

Ein *gewöhnliches Anfangswertproblem erster Ordnung* ist eine Funktionsgleichung der Form

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} . \tag{$*$}$$

Dabei sind $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht.

Beispiel 7.2

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := A \cdot x$ für ein $A \in \mathbb{R}$. Dann wird $(*)$ gelöst durch

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x(t) := \exp(tA) \cdot x_0,$$

denn $\dot{x}(t) = A \exp(tA) x_0 = Ax(t) = F(x(t))$ und $x(0) = \exp(0A) x_0 = x_0$. $\Diamond$

Aufgabe 7.3

Wir wollen das folgende lineare Anfangswertproblem lösen:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} , \tag{$**$}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.

Wir verwenden aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen, dass der Ausdruck

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegen eine Matrix $\exp(M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergiert und dass $x(t) := \exp(tA) \cdot x_0$ eine Lösung von $(**)$ ist. Uns interessiert, wie $\exp(tA)$ explizit aussieht.

(1) Sei dazu zunächst A eine Diagonalmatrix: $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ für geeignete $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (t\lambda_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (t\lambda_n)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für Diagonalmatrizen A können wir $\exp(tA)$ also explizit berechnen.

Eine Lösung von $(**)$ ist dann

$$x(t) := \exp(tA) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1)x_0^1 \\ \cdots \\ \exp(t\lambda_n)x_0^n \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

(2) Habe nun A nicht notwendig Diagonalgestalt, aber es gebe eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat, wobei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(x) := A \cdot x$. Dann ist

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{E}_n}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}_n}(\mathrm{id})\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}).$$

Zur Vereinfachung der Notation setze $B := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}_n}(\mathrm{id})$ und $\Lambda := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (dann insbesondere $B^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}_n}^{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$).

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$A^k = (B\Lambda B^{-1})^k = (B\Lambda B^{-1}) \cdots (B\Lambda B^{-1}) = B\Lambda(B^{-1}B) \cdots (B^{-1}B)\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1},$$

also

$$\exp(tA) = \exp(B(t\Lambda)B^{-1}) = B\exp(t\Lambda)B^{-1} \overset{(1)}{=} B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Also kennen wir auch für diesen Fall $\exp(tA)$ (und damit die Lösung x von $(**)$) explizit. $\diamondsuit$

Bemerkung 7.4

Jedes solche lineare Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und diese hat stets die Darstellung

$$x(t) = \exp(tA) \cdot x_0.$$

Aber: Zu A muss nicht notwendig eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Antworten auf die Frage, wann und wie man so ein $\mathfrak{V}$ findet, gibt die Eigenwerttheorie, vgl. §5.

Ist $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, dann nennt man $v_1, ..., v_n$ *Eigenvektoren von f* (bzw. von A) und $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die zugehörigen *Eigenwerte von f* (bzw. von A).

Diese Definition macht auch allgemein für endlichdimensionale K-Vektorräume $\mathcal{V}$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ Sinn. $\diamondsuit$

7.2 Ein Beispiel zu Basistransformation und Darstellungsmatrizen

Aufgabe 7.5

Gegeben seien der $\mathbb{F}_5$-Vektorraum

$$\mathcal{V} := \mathbb{F}_5[X]_4 := \{p \in \mathbb{F}_5[X] \mid \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{F}_5[X]$$

der Polynome über $\mathbb{F}_5$ vom Grad ≤ 4, die *formale Ableitung* $D : V \to V$, definiert durch

$$D(X^i) := \begin{cases} iX^{i-1} & i \geq 1 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

sowie die Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &:= (X+1;\ X^4;\ X^3+4X^2;\ X^2+4;\ X+4); \\ \mathfrak{W} &:= (2X^3+X^2;\ X^2+X;\ X^3+2X^2;\ X^4+X^2;\ X^2+4) \end{aligned}$$

von V.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ Vektorraumbasen von $\mathcal{V}$ sind.

(2) Drücken Sie die Elemente von $\mathfrak{V}$ als Linearkombination der Elemente aus $\mathfrak{W}$ aus und umgekehrt.

(3) Zeigen Sie, dass $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V},\ p \mapsto D((X+1) \cdot p)$ linear ist.

(4) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

(5) Berechnen Sie den Kern von F.

Lösung

(1) Es ist bekannt, dass $\dim(\mathcal{V}) = 5$ und $\mathfrak{E} := (1, X, X^2, ..., X^4)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist. Es genügt daher zu zeigen, dass $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ linear unabhängig sind.

(a) Seien also $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$ mit $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_5 v_5 = 0$, dann

$$\begin{aligned} & \alpha_1(X+1) + \alpha_2(X^4) + \alpha_3(X^3+4X^2) + \alpha_4(X^2+4) + \alpha_5(X+4) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_2 X^4 + \alpha_3 X^3 + (\alpha_4 + 4\alpha_3)X^2 + (\alpha_1 + \alpha_4)X + (\alpha_1 + \alpha_4 + 4\alpha_5) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 + 4\alpha_3 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_5 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_4 + 4\alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_5)$ linear unabhängig. $\Diamond$

(b) Analog seien $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$ mit $\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_5 w_5 = 0$, dann

$$\begin{aligned} & \alpha_1(2X^3+X^2) + \alpha_2(X^2+X) + \alpha_3(X^3+2X^2) + \alpha_4(X^4+X^2) + \alpha_5(X^2+4) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_4 X^4 + (2\alpha_1 + \alpha_3)X^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)X^2 + \alpha_2 X + 4\alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_4 = 0,\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_5 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $\mathfrak{W} = (w_1, ..., w_5)$ linear unabhängig. $\Diamond$

(2) (a) Wir suchen zu jedem $v_i \in \mathfrak{V}$ Skalare $\alpha_1, ..., \alpha_5 \in \mathbb{F}_5$, so dass gilt $v_i = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_5 w_5$ bzw. $\Psi_{\mathfrak{W}}(v_i) = (\alpha_1, ..., \alpha_5)$.

Berechnung von $\Psi_{\mathfrak{W}}$: Finde $\beta_1, ..., \beta_5$ (in Abhängigkeit von $\alpha_1, ..., \alpha_5$) mit

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \alpha_4 X^3 + \alpha_5 X^4 \\ \stackrel{!}{=}\ & \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \beta_4 w_4 + \beta_5 w_5 \\ =\ & \beta_1(2X^3+X^2) + \beta_2(X^2+X) + \beta_3(X^3+2X^2) + \beta_4(X^4+X^2) + \beta_5(X^2+4) \\ =\ & 4\beta_5 + \beta_2 X + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5)X^2 + (2\beta_1 + \beta_3)X^3 + \beta_4 X^4. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich (bzw. Anwendung von $\Psi_{\mathfrak{E}}$ auf die Gleichung) liefert

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0\\1&1&2&1&1\\2&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0\\1&1&2&1&1\\2&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&2&3&4&2\\0&1&0&0&0\\4&1&4&3&1\\0&0&0&0&1\\4&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \Psi_{\mathfrak{W}}(\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3X^2+\alpha_4X^3+\alpha_5X^4) \\ = \; & (3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5,\ \alpha_2,\ 4\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_5,\ 4\alpha_1) \\ =: \; & \Phi_{\mathfrak{W}}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5). \end{aligned}$$

Berechnung der $\mathfrak{W}$-Koordimaten der $v_i \in \mathfrak{V}$:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{W}}(v_1) &=& \Phi_{\mathfrak{W}}(1,1,0,0,0) &=& (0,1,0,0,4); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_2) &=& \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,0,0,1) &=& (2,0,1,1,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_3) &=& \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,4,1,0) &=& (1,0,4,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_4) &=& \Phi_{\mathfrak{W}}(4,0,1,0,0) &=& (0,0,0,0,1); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_5) &=& \Phi_{\mathfrak{W}}(4,1,0,0,0) &=& (4,1,2,0,1). \end{cases} \qquad \Diamond$$

(b) Anstatt analog vorzugehen und all diese Berechnungen noch einmal durchzuführen, überlegt man sich Folgendes:

Ist $A := (\Psi_{\mathfrak{W}}(v_1)|\cdots|\Psi_{\mathfrak{W}}(v_5)) \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$, dann gilt

$$\Psi_{\mathfrak{W}}(v_i) = Ae^{(i)} = A\Psi_{\mathfrak{V}}(v_i) = (\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}})(v_i),$$

d.h. $\Psi_{\mathfrak{W}}$ und $\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}}$ stimmen auf der Basis $\mathfrak{V}$ und damit auf ganz V überein.

Insbesondere gilt

$$e^{(i)} = \Psi_{\mathfrak{W}}(w_i) = (\mathrm{Lin}(A)\circ\Psi_{\mathfrak{V}})(w_i) = A\Psi_{\mathfrak{V}}(w_i) \quad\Rightarrow\quad \Psi_{\mathfrak{V}}(w_i) = A^{-1}e^{(i)}.$$

Wir brauchen also nur die Matrix A zu invertieren:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}0&2&1&0&4\\1&0&0&0&1\\0&1&4&0&2\\0&1&0&0&0\\4&0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4&1&4&3&0\\0&0&0&1&0\\2&0&1&0&0\\3&1&3&1&1\\1&0&1&2&0\end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{V}}(w_1) &=& (4,0,2,3,1); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_2) &=& (1,0,0,1,0); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_3) &=& (4,0,1,3,1); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_4) &=& (3,1,0,1,2); \\ \Psi_{\mathfrak{V}}(w_5) &=& (0,0,0,1,0). \end{cases} \qquad \Diamond$$

(3) F ist wohldefiniert, d.h. für jedes Polynom $p \in \mathbb{F}_5[X]_4$ ist auch $F(p)$ vom Grad ≤ 4.

Seien $p, q \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_5$, dann gilt

$$\begin{aligned} F(\alpha p+\beta q) &= D((X+1)\cdot(\alpha p+\beta q)) &&= D(\alpha(X+1)\cdot p+\beta(X+1)\cdot q) \\ &= \alpha D((X+1)\cdot p)+\beta D((X+1)\cdot q) &&= \alpha F(p)+\beta F(q). \end{aligned} \qquad \Diamond$$

(4) Berechnung der Darstellungsmatrix $B := \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)$: Wegen

$$B^i = Be^{(i)} = \mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)e^{(i)} = (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ F \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) = \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_i))$$

müssen wir zunächst die Bilder von $\mathfrak{V}$ unter F ausrechnen:

$$\begin{cases} F(v_1) &= D((X+1)(X+1)) &= D(X^2+2X+1) &= 2X+2; \\ F(v_2) &= D((X+1)(X^4)) &= D(X^5+X^4) &= 4X^3; \\ F(v_3) &= D((X+1)(X^3+4X^2)) &= D(X^4+4X^2) &= 4X^3+3X; \\ F(v_4) &= D((X+1)(X^2+4)) &= D(X^3+X^2+4X+4) &= 3X^2+2X+4; \\ F(v_5) &= D((X+1)(X+4)) &= D(X^2+4) &= 2X. \end{cases}$$

Nun können wir die Spalten von B bestimmen:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_1)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(2,2,0,0,0) &= (0,2,0,0,3); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_2)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,0,0,4,0) &= (1,0,2,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_3)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,3,0,4,0) &= (2,3,0,0,0); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_4)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(4,2,3,0,0) &= (0,2,0,0,1); \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(F(v_5)) &= \Phi_{\mathfrak{W}}(0,2,0,0,0) &= (4,2,2,0,0). \end{cases}$$

Also hat $\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F)$ die Gestalt

$$\mathrm{Mat}^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

(5) Berechnung des Kerns von F:

$$x \in \mathrm{Kern}(B) \Leftrightarrow Bx = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{L}(B) = \mathrm{span}(\{(0,1,4,0,4)\}),$$

denn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L}(B) = \mathrm{span}(\{(0,1,4,0,4)\}).$$

Wegen $F(p) = \Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}(A \cdot \Psi_{\mathfrak{V}}(p))$ suchen wir also $p \in V$ mit $\Psi_{\mathfrak{V}}(p) = (0,1,4,0,4)$ bzw.

$$\begin{aligned} p &= \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}((0,1,4,0,4)) \\ &= v_2 + 4v_3 + 4v_5 \\ &= X^4 + 4(X^3+4X^2) + 4(X+4) \\ &= X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X + 1. \end{aligned}$$

Also ist $F(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \mathrm{span}(\{X^4+4X^3+X^2+4X+1\})$, d.h.

$$\mathrm{Kern}(F) = \mathrm{span}(\{X^4+4X^3+X^2+4X+1\}). \qquad \Diamond$$

7.3 Ein Beispiel zur Jordanschen Normalform

Bemerkung 7.6 (Jordan-Transformation)

Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich in *Jordan-Normalform* überführen, d.h. es gibt invertierbares $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}, \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1, ..., m,$$

wobei λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte zu A sind, $i = 1, ..., m$.

Bis auf Permutation der *Jordan-Kästchen* $J_1, ..., J_m$ ist die Jordan-Normalform eindeutig bestimmt.

$J := UAU^{-1}$ heißt „die“ zu A gehörige *Jordan-Matrix*. ◊

Aufgabe 7.7

Wir suchen „die“ Jordanmatrix J und die Transformationsmatrix U zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

(1) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren, d.h. finde $x \neq 0$ und λ, so dass $Ax = \lambda x$.

Berechnung des charakteristischen Polynoms zu A:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = -(\lambda-1)^3,$$

d.h. $\lambda = 1$ ist einziger Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a(1) = 3$.

Ein Eigenvektor x zum Eigenwert λ erfüllt $(A - \lambda I)x = 0$, d.h.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Eine Basis des Lösungsraumes dieses Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\mu_g(\lambda) = 2$, also geometrische Vielfachheit kleiner als algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ, d.h. A ist nicht diagonalisierbar.

Bestimme nun $\mathrm{Bild}(A - \lambda I)$, hier

$$\mathrm{Bild}(A-\lambda) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Bilde dann möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren, die in $\mathrm{Bild}(A - \lambda I)$ liegen, und tausche alte Eigenvektoren gegen neue aus:

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(A - I) \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Ergänze mit *Hauptvektoren* zu einer Basis. Löse dazu für jeden Eigenvektor $h_0 \in \mathrm{Bild}(A - \lambda I)$ die Gleichung $(A-\lambda I)h_1 = h_0$. Wir erhalten so den ersten Hauptvektoren erster Stufe h_1 zum Eigenvektor h_0. Die Menge

$$\mathrm{Hau}(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \mathrm{Id})^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\} \supseteq \mathrm{Kern}(A - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{Eig}(\lambda, A)$$

heißt der *Hauptraum* zum Eigenwert λ und $\mathbb{R}^n = \mathrm{Hau}(\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Hau}(\lambda_k)$ die *Hauptraumzerlegung* von $\mathbb{R}^n$.

Fahre fort: $(A - \lambda I)h_2 = h_1$, $(A - \lambda I)h_3 = h_2$ ..., bis das Gleichungssystem nicht mehr lösbar ist. Wiederhole den Prozess für alle anderen Eigenvektoren.

$$(A - \lambda I)h_1 = h_0 \Leftrightarrow \begin{cases} h_1^{(1)} + h_1^{(3)} &= 1 \\ -h_1^{(1)} - h_1^{(3)} &= -1 \\ -h_1^{(1)} - h_1^{(3)} &= -1 \end{cases} ;\ \text{z.B. } h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir bereits genügend Vektoren für eine Basis.

(3) Sortiere die Eigen- und zugehörigen Hauptvektoren in die Spalten einer Transformationsmatrix (Hauptvektoren in der Reihenfolge der Iteration hinter die zugehörigen Eigenvektoren).

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestimme U^{-1}, z.B. mit dem Gauß-Algorithmus.

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) Stelle die Jordan-Matrix auf ($J = U^{-1}AU$).

Da unsere Transformationsmatrix aus zwei Eigenvektoren und einem Hauptvektor besteht, hat die zugehörige Jordan-Matrix die Gestalt

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \text{ mit } J_1 = (1),\ J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◊

Bemerkung 7.8

Damit können wir für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den Ausdruck $\exp(A)$ explizit ausrechnen.

Sei nämlich $A = UJU^{-1}$ mit zu A gehöriger Jordan-Matrix J, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

mit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $c_1, ..., c_{n-1} \in \{0, 1\}$ passend.

Wegen $D \cdot N = N \cdot D$ gilt die *Funktionalgleichung*

$$\exp(J) = \exp(D + N) = \exp(D) \cdot \exp(N),$$

d.h.

$$\exp(A) = \exp(UJU^{-1}) = U\exp(D + N)U^{-1} = U\exp(D)\exp(N)U^{-1} = U\exp(D)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k\right)U^{-1}.$$

Beachte: N ist *nilpotent*, d.h. für alle $k \geq n$ gilt: $N^k = 0$. ◊

7.4 Ein Beispiel zur Hauptachsentransformation

Definition 7.9

Seien $(\mathcal{V}, s)$ der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ eine Vektorraumbasis von $\mathcal{V}$. Dann

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) := (b(v_i, v_j))_{1\le j\le n}^{1\le i\le n} = \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \cdots & b(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_n,v_1) & \cdots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

die *Darstellungsmatrix von b* bzgl. der Basis $\mathfrak{V}$.

Bemerkung 7.10

(1) Mit b ist für beliebige Basis $\mathfrak{V}$ auch $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ symmetrisch.

(2) Genau dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ eine Diagonalmatrix, wenn $\mathfrak{V}$ eine Orthogonalbasis ist.

(3) Seien $v, w \in \mathcal{V}$ und x, y die Koordinatenvektoren von v, w bzgl. $\mathfrak{V}$. Nach Bem. 6.16.1 gilt dann $b(v,w) = x^T \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) y$.

(4) Seien $\mathfrak{W} = (w_1, ..., w_n)$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$ und $P = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})$ die Darstellungsmatrix des Basiswechsel von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}$, dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = P^T \mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) P$.

(5) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann definiert $b(x,y) := x^T Ay = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b) = A$. ◊

Satz 7.11 (Hauptachsentransformation)

Seien b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$,.

Dann gibt es eine Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{R}^n$, wobei $\mathfrak{V}$ eine Orthogonalbasis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, ..., n$.

Beweis

Sei $A := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b)$, dann ist A symmetrisch, nach dem Spektralsatz 6.17 gibt es also n reelle Eigenwerte $\mu_1, ..., \mu_n$ von A und eine Orthonormalbasis $\mathfrak{W}$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Wähle

$$v_i := \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\mu_i|}} & \mu_i \neq 0 \\ w_i & \mu_i = 0 \end{cases}, \qquad i = 1, ..., n,$$

dann ist (Œ $\mu_i, \mu_j \neq 0$)

$$b(v_i, v_j) = \frac{b(w_i, w_j)}{\sqrt{|\mu_i \mu_j|}} = \frac{\langle Aw_i, w_j\rangle}{\sqrt{|\mu_i \mu_j|}} = \frac{\mu_i \langle w_i, w_j\rangle}{\sqrt{|\mu_i \mu_j|}} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

also $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = (b(v_i, v_j))_{1\le j\le n}^{1\le i\le n} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \{-1, 0, 1\}$. □

Aufgabe 7.12

Wir betrachten die symmetrische Bilinearform b, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(b))$$

gegeben ist, d.h. $b(x,y) := \langle Ax, y\rangle$.

(1) Gesucht ist eine Orthonormalbasis $\mathfrak{O}$ von $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{O}}(b)$ Diagonalgestalt hat.

(2) Sei $q(x) := b(x,x)$ die zu b gehörige *quadratische Form*. Wie sieht $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 1\}$ aus?

(3) Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

Lösung

(1) Um die A Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi(A)$ von A:

$$\chi(A) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1$ von A sind also paarweise verschieden und die zugehörigen Eigenräume damit alle eindimensional. Als zugehörige Eigenvektoren ermitteln wir

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normierung von w_1, w_2, w_3 liefert die gesuchte Basis $\mathfrak{O} = \{o_1, o_2, o_3\} = \{\frac{1}{3}w_1,\ \frac{1}{3}w_2,\ \frac{1}{3}w_3\}$.

(2) Sei $x = \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \alpha_3 o_3$. Dann ist $q(x) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2$, d.h.

$$E = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2 = 1\}.$$

E beschreibt also einen „Rotationselpisoid“ mit *Rotationsachsen* o_1, o_2, o_3 (d.h. bei einer Drehung um eine dieser Achsen ändert sich E nicht). Dies motiviert die Bezeichnung „Hauptachsentransformation“.

(3) Gemäß Der Hauptachsentransformation 7.11 ist $\mathfrak{V}$ gegeben als $\mathfrak{V} = (\frac{1}{\sqrt{2}}o_1,\ \frac{1}{\sqrt{5}}o_2,\ o_3)$. ◊

Satz 7.13 (Sylvesterscher Trägheitssatz)

Seien b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Basen des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b)$ haben den gleichen Rang und die Anzahl an positiven bzw. negativen Eigenwerten von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b)$ stimmt überein.

Folgerungen 7.14

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{V}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(1) Genau dann ist b positiv definit, wenn alle Eigenwerte von $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ (strikt) positiv sind.

Seien nämlich $\mathfrak{W}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{W}}(b) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $v = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$, dann $b(v,v) = q(v) = \lambda_1\alpha_1^2 + ... + \lambda_n\alpha_n^2$, also $b(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i > 0$.

Da in dem Fall nach Sylvester auch $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ nur positive Eigenwerte hat, folgt die Behauptung.

(2) Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *positiv definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gilt: $x^T Ax = \langle x, Ax\rangle > 0$.

Sei nun A symmetrisch, dann gilt: A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

(3) Insbesondere ergibt sich aus (1): b ist genau dann positiv definit, wenn $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{V}}(b)$ positiv definit ist.

(4) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $\chi(A) = (-1)^n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0$ das zugehörige charakteristische Polynom. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn $(-1)^j\alpha_j > 0$ für alle $j = 1, ..., n-1$.

(5) Hauptminorenkriterium: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle $k = 1, ..., n$ gilt $\det(A_k) > 0$, wobei $A_k := (a_{ij})_{1\leq j\leq k}^{1\leq i\leq k}$ der k-te *Hauptminor* von A.

(6) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Dann haben A und P^TAP die gleiche Anzahl positiver und negativer Eigenwerte.

(7) Alle Resultate dieses Kapitels lassen sich auf Hermitesche Formen in unitären ($\mathbb{C}$-)Vektorräumen übertragen. ◊