Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Wintersemester 2009/2010
24.03.2010

Klausur zur Linearen Algebra I

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Prüfen Sie sofort **nach Beginn der Klausur**, ob Sie alle **8 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Tragen Sie auf dieser Seite und **bei jeder Aufgabe** Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/10) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 64.

Die einzigen erlaubten Arbeits-/Hilfsmittel sind

- ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

(b) Zeigen Sie, dass A in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Komatrix $\operatorname{com}(A) \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ von A.

(d) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

(e) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{Q}^3).$$

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie durch einen kurzen Beweis oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, jeweils *ohne* Ergebnisse aus den Übungen zu verwenden:

(a) Ist f nicht injektiv, so ist f surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(d) Gilt $C = A$ und gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f bijektiv.

(e) Gilt $C = A$, ist f bijektiv und gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so gilt $g = f^{-1}$.

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien M und N Mengen mit $N \subsetneq M$ (es sei also N eine *echte* Teilmenge von M, das heißt $\cancel{M \subseteq N}$ $N \subseteq M$ aber $M \neq N$) und $x \in N$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie es *nicht* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen halben Punkt. Für jede falsche *Ja*–Antwort gibt es einen halben Punkt Abzug, für jede falsche bzw. unzureichend begründete *Nein*–Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Abbildung	(i) injektiv? (ii) surjektiv?	Begründung, falls nicht
$f_1\colon \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \cap N$	(i) (ii)	
$f_2\colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(M),\ A \mapsto A$	(i) (ii)	
$f_3\colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \cup \{x\}$	(i) (ii)	
$f_4\colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \setminus \{x\}$	(i) (ii)	

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Behauptungen wahr sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie *falsch* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen Punkt. Für jede falsche *Ja*–Antwort gibt es einen Punkt Abzug, für jede falsche bzw. nicht begründete *Nein*–Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Aussage	Wahr?	Begründung, falls nicht
Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit m Elementen, so ist $a^{m-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.		
In $\mathbb{F}_9$ gibt es Elemente $x, y \neq 0$ mit $x \cdot y = 0$.		
Eine Abbildung $G \longrightarrow H$ zwischen zwei abelschen Gruppen G und H bildet 0_G stets auf 0_H ab.		
Jede lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen den zugrundeliegenden abelschen Gruppen.		
Jede Kongruenzrelation auf einer abelschen Gruppe $(G, +)$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge G.		
Für alle $u \in \mathbb{Q}^2$ ist $v \equiv w :\Longleftrightarrow$ (es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $v = w + mu$) eine Kongruenzrelation auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2$.		

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnen in einem geeigneten Quotientenring A/I (wobei A ein gegebener kommutativer Ring und I ein Ideal von A ist)

(a) den Rest von 12321892 bei Division durch 9 in $A := \mathbb{Z}$,

(b) den Rest von 182^{11} bei Division durch 3 in $A := \mathbb{Z}$,

(c) den Rest von $(X-1)^8$ bei Division durch $X^2 - 2X - 1$ in $A := \mathbb{R}[X]$.

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_{11})^{4\times 4}.$$

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 7: (17 Punkte)

Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_2$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 in der Unbestimmten X. Es bezeichne $\underline{v} := (1, X, X^2)$ die Basis von V bestehend aus den Monomen.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{w} := (X^2, (1-X)X, (1-X)^2)$ auch eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v}, \underline{w})$ und $M(\underline{w}, \underline{v})$.

(c) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f\colon V \to V,\ p \mapsto p(1)X^2 + 4p\Big(\frac{1}{2}\Big)(1-X)X + p(0)(1-X)^2.$$

(Hierbei ist $p(a)$ die Auswertung des Polynoms p in $a \in \mathbb{R}$. Sie müssen die Linearität *nicht* nachprüfen.)
Geben Sie die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ an und berechnen Sie $M(f, \underline{v}, \underline{v})$ und $M(f, \underline{w}, \underline{w})$.

(d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ von f gleich $-(X-1)^3$ ist.

(e) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{R}[X]$ von f.

(f) Entscheiden Sie, ob f trigonalisierbar ist.

(g) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

Name: **Matrikelnummer:**
Übungsgruppe: **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Wir nennen ein $\lambda \in K$ einen **Linkseigenwert** von A, wenn es einen Zeilenvektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $vA = \lambda v$ gibt. Wir nennen einen Zeilenvektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ einen **Linkseigenvektor** von A, wenn es ein $\lambda \in K$ mit $vA = \lambda v$ gibt. Zeigen Sie durch einen kurzen Beweis oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel:

(a) Die Linkseigenwerte einer Matrix sind genau ihre Eigenwerte.

(b) Ein Zeilenvektor ist genau dann Linkseigenvektor einer Matrix, wenn der zugehörige Spaltenvektor ein Eigenvektor dieser Matrix ist.