1 Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathcal{K}$ ein **Körper**, d.h. $\mathcal{K} = (K, p, m)$, wobei K eine Menge ist (die **Grundmenge** des Körpers) und $p : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x + y,\ m : K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x \times y$ Abbildungen sind (die **Addition** und die **Multiplikation**), so dass gelten:

(A1) $\forall x, y, z \in K : x + (y + z) = (x + y) + z$; (**Assoziativgesetz** für +)

(A2) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$; (**Kommutativgesetz** für +)

(A3) $\exists o \in K : \forall x \in K : x + o = x$; (**Existenz eines Neutralen** für +)

(A4) $\forall x \in K : \exists(-x) \in K : x + (-x) = o$; (**Existenz von Inversen** für +)

(M1) $\forall x, y, z \in K : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$; (**Assoziativgesetz** für $\times$)

(M2) $\forall x, y \in K : x \times y = y \times x$; (**Kommutativgesetz** für $\times$)

(M3) $\exists e \in K\backslash\{o\} : \forall x \in K : x \times e = x$; (**Existenz eines Neutralen** für $\times$)

(M4) $\forall x \in K\backslash\{o\} : \exists(x^{-1}) \in K : x \times (x^{-1}) = e$; (**Existenz von Inversen** für $\times$)

(AS) $\forall x, y, z \in K : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$. (**Distributivgesetz**)

Weiter enthalte K kein Element x, für das gilt $x \times x + e = 0$. Wir definieren auf $C = K \times K$ neue Abbildungen $p' : C \times C \to C,\ p'(x, y) = x \oplus y$ und $m' : C \times C \to C,\ m'(x, y) = x \otimes y$ durch:

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (u, v) &= (x + u, y + v);\\ (x, y) \otimes (u, v) &= ((x \times u) - (y \times v), (x \times v) + (y \times u)).\end{aligned}$$

(1.1) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C} = (C, p', m')$ ein Körper ist.

Hinweis: Um zu $\vec{x} \in C\backslash\{\vec{o}\},\ \vec{x} = (x_1, x_2)$ das multiplikativ Inverse $\vec{x}^{-1}$ zu bestimmen, betrachten Sie die Gleichung

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1, x_2)^{-1} \otimes ((x_1, -x_2)^{-1} \otimes (x_1, -x_2)).$$

Seien M eine Menge und $\Phi : K \to M$ eine **Bijektion**, d.h. eine Abbildung, für die gelten:

$\forall x \in M : \exists y \in K : \Phi(y) = x$; (**Surjektivität**)

$\forall x, y \in M : \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y$. (**Injektivität**)

Sei $x \in M$. Wir bezeichnen mit $\Phi^{-1}(x)$ dasjenige $y \in K$ mit $\Phi(y) = x$.

Seien $x, y \in M$. Wir definieren Abbildungen $p_0 : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x \boxplus y$ und $m_0 : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \boxtimes y$ durch

$$\begin{aligned}x \boxplus y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y));\\ x \boxtimes y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \times \Phi^{-1}(y)).\end{aligned}$$

(1.2) Beweisen Sie, dass $\mathcal{M} = (M, p_0, m_0)$ ein Körper ist.

Seien i ein Element, das nicht in K enthalten ist, und $\mathcal{K}[i] = (K[i], [+], [\times])$ ein Körper mit möglichst kleiner Grundmenge $K[i] \supseteq K \cup \{i\}$, so dass für alle $x, y \in K$ gelten:

$$x[+]y = x + y, \qquad x[\times]y = x \times y, \qquad (i[\times]i)[+]1 = 0.$$

(1.3) Beweisen Sie:

$$K[i] = \{a[+](i[\times]b) \mid a, b \in K\}.$$

(1.4) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K$ gilt:

$$a[+](i[\times]b) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0.$$

(1.5) Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

$$a[+](i[\times]b) = c[+](i[\times]d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ und } b = d.$$

(1.6) Finden Sie eine Bijektion $\Phi : C \to K[i]$, so dass für alle $x, y \in K[i]$ gilt:

$$\begin{aligned} x[+]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \oplus \Phi^{-1}(y)); \\ x[\times]y &= \Phi(\Phi^{-1}(x) \otimes \Phi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

(1.7) Gibt es mehrere Möglichkeiten, solch ein Φ zu definieren?

Seien $\mathcal{K}_1 = (K_1, +_1, \times_1)$ und $\mathcal{K}_2 = (K_2, +_2, \times_2)$ zwei Körper. Wir nennen eine Bijektion $\Phi : K_1 \to K_2$ einen **Körperisomorphismus** zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, falls für alle $x, y \in K_1$ gilt:

$$\Phi(x +_1 y) = \Phi(x) +_2 \Phi(y), \qquad \Phi(x \times_1 y) = \Phi(x) \times_2 \Phi(y), \qquad \Phi(e_1) = e_2.$$

(1.8) Beweisen Sie, dass es zwischen zwei Körpern $\mathcal{K}_1[i_1]$ und $\mathcal{K}_2[i_2]$ mit obigen Eigenschaften stets einen Körperisomorphismus gibt.

Ist speziell $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ der Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +_\mathbb{R}, \times_\mathbb{R})$, dann nennen wir $\mathcal{C}$ und jeden Körper, der zu $\mathcal{C}$ isomorph ist, den **Körper der komplexen Zahlen** $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +_\mathbb{C}, \times_\mathbb{C})$.

Wir können $\mathcal{R}$ als Teilkörper von $\mathcal{C}$ auffassen via der **Einbettung** (d.h. injektiven Abbildung)

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto (x, 0).$$

Die **komplexe Konjugation**

$$\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) \mapsto (x, -y)$$

definiert einen Körperisomorphismus auf $\mathcal{C}$.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nichtkonstante Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \qquad (a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C})$$

besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.