2 Modellierung

Unter einem **Spiel** verstehen wir eine Situation, die durch eine **Anfangskonstellation** gewisser Objekte und eine Reihe von **Regeln**, mit denen aus einer gegebenen Konstellation eine neue erreicht werden kann, charakterisiert wird. Ein **Zug** besteht aus der Anwendung genau einer dieser Regeln.

Wir wollen im Folgenden solche Spiele durch mathematische Objekte charakterisieren – eine solche Charakterisierung heißt ein **Modell** des Spiels. Modelle sind Tripel

$$M = (K, x^{\mathrm{anf}}, L),$$

bestehend aus einer Menge K (aller Konstellationen), einem $x^{\mathrm{anf}} \in K$ (der Anfangskonstellation) und einer Menge L von Funktionen $Z : K \to K$ (den Zügen), die jeder Konstellation $x \in K$ eine neue Konstellation $Z(x) \in K$ zuordnen, wobei $Z(x)$ diejenige Konstellation ist, die aus x entsteht, wenn man den zu Z gehörigen Zug durchführt.

Natürlich muss darauf geachtet werden, dass sich Züge und zugehörige Funktionen genau entsprechen, d.h. kann eine Konstellation x durch Ausführung eines Zuges in eine Konstellation y übergeführt werden, dann muss es eine Funktion $Z \in L$ geben mit $Z(x) = y$. Umgekehrt muss es zu jedem $x \in K$ und jedem $Z \in L$ einen Zug geben, so dass $Z(x)$ durch Anwendung dieses Zuges aus x entsteht.

Die Menge der nach n Zügen erreichbaren Konstellationen ist dann

$$E_n := \{x \in K \mid \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}})\}.$$

Die Menge aller nach endlich vielen Zügen erreichbaren Konstellationen ist

$$E_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \left\{ x \in K \mid \exists n \in \mathbb{N} : \exists Z_1, ..., Z_n \in L : x = (Z_n \circ \cdots \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}}) \right\}.$$

Wir betrachten ein gewöhnliches Schachbrett, auf dem nur eine einzige Figur steht: Der linke weiße Läufer. Ein Zug ist natürlich eine Diagonalbewegung der Figur nach den üblichen Schachregeln, wobei es auch erlaubt ist, die Figur gar nicht zu bewegen.

Ist es möglich, diesen in endlich vielen Schritten auf das Feld links von seiner Startposition zu ziehen?

(2.1) Modellieren Sie diese Situation, d.h. geben Sie eine mögliche Menge $M = (K, x^{\mathrm{anf}}, L)$ an.

(2.2) Finden Sie geeignete Funktionen $Z_1, Z_2 \in L$, so dass $(Z_2 \circ Z_1)(x^{\mathrm{anf}})$ die Figur auf das Feld (2,1) befördert. Finden Sie weiter ein $Z \in L$, so dass $Z(Z(Z(Z(Z(x^{\mathrm{anf}})))))$ die Figur auf Feld (3,8) befördert.

(2.3) Bestimmen Sie E_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ sowie E_∞.

(2.4) Beweisen Sie, dass die oben beschriebene Endkonstellation $x^{\mathrm{end}} = (8, 2)$ nicht erreichbar ist.