3 Invariantenmethoden

Unsere Aufgabe wird es im Folgenden sein, bei verschiedenen Spielen durch Ausführen endlich vieler Züge von der Anfangskonstellation aus eine bestimmte Endkonstellation zu erreichen – oder zu beweisen, dass dies nicht möglich ist.

Als besonders nützlich erweist es sich in letzterem Fall, nach einer **Invarianten** zu suchen, d.h. nach einer Funktion F, die jeder Konstellation einen bestimmten Wert zuordnet und für die gelten:

(1) F ist auf der Menge der *erreichbaren* Konstellationen konstant, d.h. $\forall x \in E_\infty : F(x) = F(x^{\text{anf}})$;

(2) Die Funktionswerte der Anfangs- und der Endkonstellation sind verschieden, d.h. $F(x^{\text{anf}}) \neq F(x^{\text{end}})$.

In dem Fall ist es dann offenbar nicht möglich, die Endkonstellation in endlich vielen Zügen zu erreichen.

Im vorigen Beispiel **(2.4)** wäre eine geeignete Invariante die Funktion $F : K \to \{u, g\}$ mit

$$\forall x = (i, j) \in K : x \mapsto F(x) := \text{Par}(i + j),$$

denn dann sind $F(x) = F(x^{\text{anf}}) = u$ für alle $x \in E_\infty$ und $F(x^{\text{end}}) = g$.

(3.1) Betrachten wir ein üblich gefärbtes, 8×8-Schachbrett. Man kann in einem Zug alle Felder einer Zeile umfärben, alle Felder einer Spalte umfärben oder vier Felder, die ein 2×2-Quadrat bilden, umfärben (*Umfärben* bedeutet dabei, die schwarzen Felder weiß zu färben und die weißen Felder schwarz).

Kann man nach endlich vielen Zügen erreichen, dass ein Feld schwarz ist und alle anderen weiß sind?

(3.2) In jedem Feld eines 3×3-Schachbretts sitzt ein Käfer. Ein Zug besteht daraus, dass alle Käfer gleichzeitig von ihrem Feld aus in ein benachbartes Feld wechseln (nach links, rechts, oben oder unten).

Ist es möglich, dass sich nach dem ersten Wechsel in jedem Feld genau ein Käfer befindet?

(3.3) Max und Moritz zerreißen die Schulordnung. Max zerreißt jedes Stück, das ihm in die Hände fällt, in drei Fetzen, Moritz in Fünf. Als der Lehrer Lempel die Lausbuben erwischt, verlangt er, die Schulordnung wieder zusammenzukleben. Widerwillig fügen sich die beiden der Anweisung. Zusammen finden sie einhundert Papierfetzen.

Kann die zusammengeklebte Schulordnung vollständig sein?

(3.4) An einem Öbstebaum im Paradies hängen fünfundzwanzig Äpfel und fünfundzwanzig Bananen. Pro Stunde suchen Adam und Eva den Baum auf und pflücken gemeinsam zwei Früchte. Plücken sie zwei Früchte der gleichen Sorte, wächst ein Apfel nach. Pflücken sie dagegen zwei Früchte verschiedener Sorten, wächst eine Banane nach. Die beiden bedienen sich so lange am Baum, bis nur noch eine Frucht übrig ist.

Handelt es sich um eine Banane oder um einen Apfel?

(3.5) An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, ..., 137$. In jedem Schritt darf man zwei beliebige Zahlen wegwischen und statt dessen die Summe der beiden weggewischten Zahlen anschreiben. Wir führen so viele Schritte durch, bis nur noch eine Zahl übrig ist.

Welche Werte kann diese letzte Zahl annehmen?

(3.6) Wir betrachten eine neue Schachfigur, die in jedem Zug auf ein Nachbarfeld wechselt und dann drei Schritte orthogonal dazu weiterläuft. Die Figur startet links oben.

Ist es der Figur möglich, nach endlich vielen Schritten auf das Feld rechts von ihrer Startposition zu wechseln?

(3.7) Kann ein gewöhnliches Schachpferd von seiner Startposition aus jedes Feld des Brettes nach endlich vielen Schritten erreichen?