

4 Antiinvariantenmethoden

Im Gegensatz zu einer Invariante ist eine **Antiinvariante** eine Funktion, die sich nach *jedem* Zug ändert, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A' \in E_n$, $A \in E_{n+1}$ gilt $F(A') \neq F(A)$. Von Interesse sind beispielsweise Antiinvarianten, deren Funktionswerte in \mathbb{N} liegen und immer kleiner werden: Mit solchen kann nachgewiesen werden, dass ein Prozess nach endlich vielen Schritten zum Stillstand kommen muss.

(4.1) Jeder von n Abgeordneten in einem Parlament hat höchstens drei Feinde.

Kann man die Abgeordneten so auf zwei Häuser aufteilen, dass jeder Abgeordnete in seinem Haus höchstens einen Feind hat?

(4.2) In einem Parlament sitzen $2n$ Abgeordnete, von denen jeder höchstens $n - 1$ Feinde hat, wobei Feindschaften immer in beide Richtungen gelten: Ist ein Abgeordneter der Feind eines anderen, dann auch umgekehrt.

Ist es möglich, die Abgeordneten so an einen runden Tisch zu setzen, dass keine zwei Feinde nebeneinander sitzen?

(4.3) In einem Staat gibt es n Städte, von denen jede entweder von der schwarzen oder der weißen Partei regiert wird. Jede dieser Städte ist mit ungerade vielen anderen Städte befreundet. Der Reihe nach wird jeden Monat in einer der Städte gewählt. Dabei wählen die Bürger diejenige Partei, die in den befreundeten Städten die Mehrheit inne hat.

Kommt der Prozess zu einem Stillstand, d.h. wählt ab einem gewissen Zeitpunkt jede Stadt diejenige Partei, die diese bereits regiert?

(4.4) Wir betrachten ein $m \times n$ -Tableau, dessen Einträge ganze Zahlen sind. Ein Zug besteht darin, eine Zeile oder Spalte auszuwählen und dort die Vorzeichen aller Einträge zu wechseln.

Ist es möglich, dass nach endlich vielen Zügen alle Zeilen- und alle Spaltensummen mindestens 0 betragen?