5 Geometrische Modellierung

In der Analytischen Geometrie werden Probleme aus der Euklidischen Geometrie mit analytischen Hilfsmitteln bearbeitet. Dies ist zunächst ein klassisches Modellierungsproblem: Geometrische Objekte wie Punkte, Parallelen und rechte Winkel wollen in analytische Objekte, d.h. Zahlen, übersetzt werden. Universelles Instument ist hier das nach dem französischen Naturwissenschaftler und „Erfinder" der analytischen Geometrie, **René Descartes** (1596-1850), benannte **Kartesische Koordinatensystem**.

Wir betrachten einige Aspekte dieses Übersetzungsprozesses, ohne streng nach dem von **Euklid von Alexandria** (ca. 360-280 v. Chr.) vorgeschlagenen Axiomensystem vorzugehen.

(5.1) Man modelliere die folgenden Objekte der ebenen Geometrie: Punkt, Gerade, Parallele zu einer Geraden, Dreieck, Quadrat, Abstand, Länge, Winkel.

Man modelliere eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch eine Menge, eine Matrix, einen affinen Vektorraum, einen Vektorraum und die Lösungsmenge eines Gleichungssystems.

(5.2) Man zeige, dass der Vektorraum in **(5.1)** zweidimensional ist, indem man einen Vektorraumsomorphismus in den $\mathbb{R}^2$ findet.

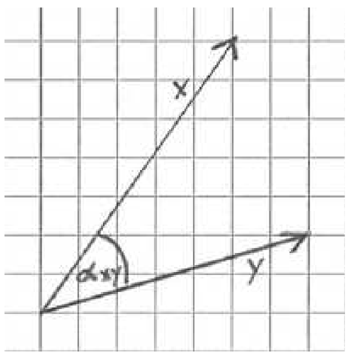
(5.3) Man beweise, dass der Winkel $\alpha_{xy} := \sphericalangle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ die folgende Beziehung erfüllt:

$$\cos(\alpha_{xy}) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}.$$

Hinweis: Das Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

das wir hier weder analytisch beweisen noch geometrisch motivieren wollen, könnte dabei nützlich sein.



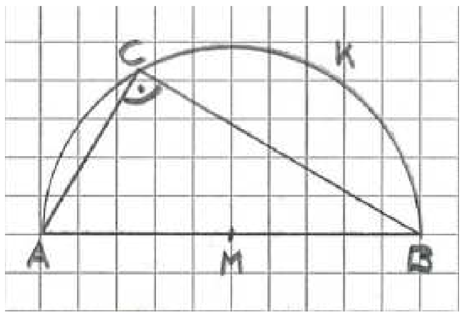
(5.4) Man beweise den **Satz von Thales:**

Sind A, C Punkte im $\mathbb{R}^2$, K ein Kreis um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und $C \neq A, B$ ein beliebiger Punkt auf K, so ist

$$\sphericalangle\left(\overline{AC}, \overline{BC}\right)$$

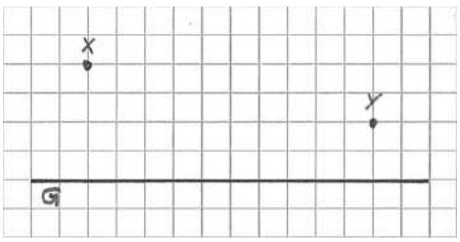
stets ein rechter Winkel.

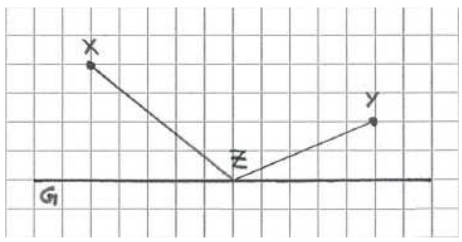
Ein elementarer Beweis des Satzes (der nur benutzt, dass Winkelsummen im Dreieck 180° betragen und dass die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich groß sind) wird **Thales von Milet** (ca. 624-546 v. Chr.) zugeschrieben.



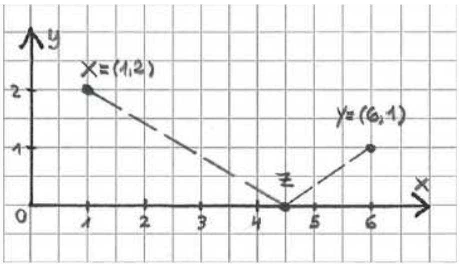
(5.5) Man konstuiere (mit Zirkel und Lineal) einen Punkt Z auf der Geraden G, so dass die Länge der Strecke $\overline{XZY}$ minimal wird.

Man konstruiere weiter einen Punkt $P \in G$, so dass $\overline{XP}$ und $\overline{PY}$ gleich lang sind.

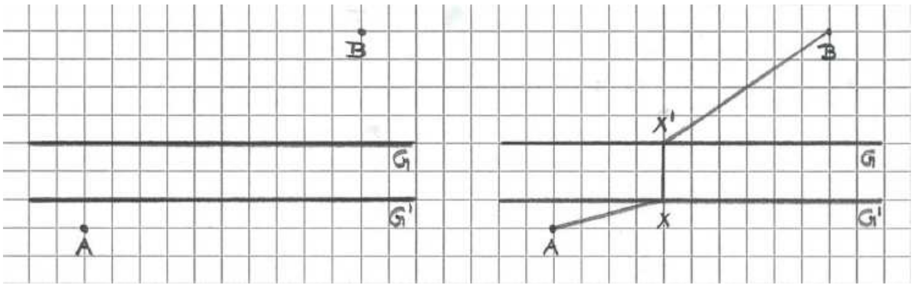




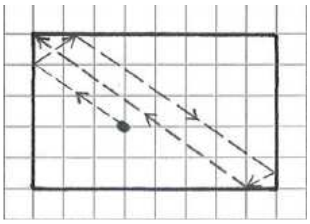
Wie lauten die kartesischen Koordinaten von Z und P, wenn X die Koordinaten $(1, 2)$ und Y die Koordinaten $(6, 1)$ hat und G die x-Achse ist?



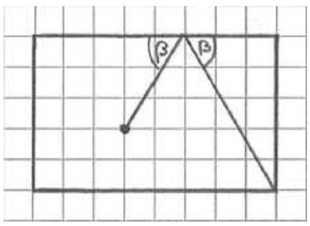
(5.6) Man finde zwei Punkte $X \in G,\ X' \in G'$, so dass $\overline{XX'}$ orthogonal zu den Parallelen G, G' ist und die Strecke $\overline{AXX'B}$ minimale Länge hat.



(5.7) (Billardproblem) Man konstruiere einen Winkel α, so dass die Billardkugel B nach Abprall von allen vier Banden in einem Loch landet (es gilt natürlich nach jeder Bandenberührung, dass Ein- und Austrittwinkel gleich groß sind).



Hinweis: Man löse das Problem zunächst für eine Bandenberührung.



Man berechne diesen Winkel für die angegebenen Maße.