Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch

Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

1. Übungsblatt – Abgabe: Montag, 19.11.2012, 8:30 Uhr

Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$||A||_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\operatorname{spur}(AA^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\operatorname{spur}(A^{\mathrm{T}}A)}$$

   eine Norm auf dem Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen definiert.

2. Zeigen Sie, dass $|| \cdot ||_{\mathrm{F}}$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ submultiplikativ ist, d.h. dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$||AB||_{\mathrm{F}} \leq ||A||_{\mathrm{F}} ||B||_{\mathrm{F}}.$$

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und bestehe $U \in \mathbb{R}^{d\times m}$ aus paarweise orthonormalen Spalten. Zeigen Sie:

$$||UA||_{\mathrm{F}} = ||A||_{\mathrm{F}}.$$

Aufgabe 2.

Seien $\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Theta = (0, T) \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{z}(t; x, y) - \sigma \Delta z(t; x, y) &= f(t; x, y) && \text{in } \Theta \times \Omega, \\ z(t; x, y) &= g(t; x, y) && \text{in } \Theta \times \partial\Omega \\ z(0; x, y) &= z_0(x, y) && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Weiter seien $\mathrm{x} = (x_0, ..., x_{N_x+1}) \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ und $\mathrm{y} = (y_0, ..., y_{N_y+1}) \in \mathbb{R}^{N_y+1}$ äquidistante Diskretisierungen der Ortsvariablen x, y.

1. Diskretisieren Sie die Differenzialgleichung mittels der Finite-Differenzen-Methode im Ort und stellen Sie das zugehörige System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

$$\Phi \dot{\mathrm{z}}(t) + \Psi \mathrm{z}(t) = \mathrm{f}(t) \text{ in } \Theta \qquad \Phi \mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0$$

   auf, d.h. bestimmen Sie $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{N_xN_y \times N_xN_y}$ und $\mathrm{f}(t), \mathrm{z}_0 \in \mathbb{R}^{N_xN_y}$, so dass $\mathrm{z}_{ij}(t) \approx z(t; x_i, y_j)$. Beachten Sie: $\mathrm{z} \notin \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$, sondern $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_{11}, ..., \mathrm{z}_{1n}, ..., ..., \mathrm{z}_{m1}, ..., \mathrm{z}_{mn}) \in \mathbb{R}^{N_xN_y}$ lexikographisch geordnet.

2. Formulieren Sie für das System das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren. Sind die Methoden wohldefiniert, d.h. besitzen die zugehörigen linearen Gleichungssysteme stets eine eindeutige Lösung?