Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch

Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

2. Übungsblatt – Abgabe: Dienstag, 27.11.2012, 8:15 Uhr in der Vorlesung

Aufgabe 3.

Vervollständigen Sie den Beweis zu Theorem 1.1.1:

1. Zeigen Sie, dass für die normierten Eigenvektoren $\psi_1, ..., \psi_\ell \in \mathbb{R}^m$ der Matrix YY^T zu den ℓ größten Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_\ell$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, \psi_i \rangle_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i.$$

2. Zeigen Sie per Induktion über ℓ, dass für alle orthonormalen $\phi_1, ..., \phi_\ell \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i.$$

Bemerkung: $(\psi_1, ..., \psi_\ell)$ is somit eine Lösung von $(\mathbf{P}^\ell)$.

Aufgabe 4.

Seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vom Rang n und $U^\mathrm{T} A V = \Sigma$ eine Singulärwertzerlegung von A zu den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$. Mit $u_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., m$, bezeichnen wir die Spalten von U und mit $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., n$, die Spalten von V. Weiter seien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ die n größten Eigenwerte von $A^\mathrm{T} A$. Zeigen Sie:

1. $Av_i = \sigma_i u_i$ und $A^\mathrm{T} u_i = \sigma_i v_i$ für alle $i = 1, ..., n$.
2. $||A||_2 = \sigma_1$.
3. $\sigma_i^2 = \lambda_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Aufgabe 5.

1. Habe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vollen Rang und sei $A = U \Sigma V^\mathrm{T}$ eine Singulärwertzerlegung von A. Geben Sie eine Singulärwertzerlegung von A^{-1} an.
2. Bererchnen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$