Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch

Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

3. Übungsblatt – Abgabe: Dienstag, 11.12.2012, 8:15 Uhr in der Vorlesung

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{\phi_1,\ldots,\phi_\ell \in \mathbb{R}^m} \int_0^T \Big\| y(t) - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y(t), \phi_i \rangle_W \phi_i \Big\|_W^2 \,\mathrm{d}t \qquad \text{s.t.} \qquad \langle \phi_i, \phi_j \rangle_W = \delta_{ij} \qquad \left(\hat{\mathbf{P}}_W^\ell\right)$$

1. Bringen Sie das Problem in die Standardform
$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} J(x) \qquad \text{s.t.} \qquad e(x) = 0$$
für geeignete Funktionen $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $e : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Achten Sie dabei darauf, dass e keine redundanten Einträge enthält.
2. Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla e(x)$.
3. Sei $x^* \in \mathbb{R}^N$ ein lokales Minimum von J unter der Nebenbedingung $e(x^*) = 0$. Zeigen Sie, dass ein Lagrangemultiplikator $\lambda^* \in \mathbb{R}^M$ existiert mit $\nabla J(x^*) + \langle \lambda^*, \nabla e(x^*) \rangle_{\mathbb{R}^M} = 0$, d.h. weisen Sie nach, dass x^* ein regulärer Punkt von J ist.

Aufgabe 7.

1. Seien $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Approximieren Sie das Integral $\int u(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Trapezregel.
2. Bestimmen Sie die symmetrische und positiv definite Matrix der Trapezregelgewichtung $W \subseteq \mathbb{R}^{N\times N}$, so dass für $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gilt
$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{L}^2} \approx \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle_W = \mathrm{u}^{\mathrm{T}} W \mathrm{v},$$
wobei $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$ durch Auswertung der u, v auf einem äquidistanten Gitter von Ω entstehen. Macht diese Definition für alle $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ Sinn?
3. Wiederholen Sie 1. und 2. für den Fall $\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subseteq \mathbb{R}^2$.
4. Wie sieht W in der Situation der ersten Programmieraufgabe aus?
5. Die Finite Elemente-Diskretisierung der Differenzialgleichung aus der ersten Programmieraufgabe hat die Form
$$\Phi\dot{\mathrm{z}} + \Psi\mathrm{z} = 0, \qquad \Phi\mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0,$$
wobei $\Phi = (\langle \phi_i, \phi_j \rangle) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $\Psi = (\nabla\phi_i, \sigma\nabla\phi_j) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Masse- und Steifigkeitsmatrix zur Finite Elemente-Basis $(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ bezeichnen. Wie wird in dieser Situation die Matrix W gewählt?
6. Wie sieht W in 5. für das $\mathcal{H}^1(\Omega)$-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \langle \nabla\cdot, \sigma\nabla\cdot \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ aus?