Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch

Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

4. Übungsblatt – Abgabe: Dienstag, 08.01.2013, 8:15 Uhr in der Vorlesung

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das Minimierungsproblem mit PDE-Beschränkungen

$$\min_{(y,u)} J(y,u) = \frac{\sigma_Q}{2} \int_0^T ||y(t) - y_Q(t)||^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \frac{\sigma_\Omega}{2} ||y(T) - y_\Omega||^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \frac{\kappa}{2} \int_0^T ||u(t)||^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{y}(t) - \sigma \Delta y(t) = \beta u(t) \text{ in } \Omega, \qquad y(t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \qquad y(0) = y_0 \text{ in } \Omega.$$

Dabei bezeichnen $y_Q \in \mathcal{L}^2(0,T;\Omega)$ und $y_\Omega \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ die gewünschten Zustände, die y und $y(T)$ annehmen sollen, u die frei wählbare Kontrolle und $\sigma_Q, \sigma_\Omega, \kappa, \beta$ positive Konstanten.

Da die Zielfunktion strikt konvex ist und die Nebenbedingung eine lineare Gleichung, besitzt das Problem eine eindeutige Lösung $(y^*, u^*) \in Y \times U$, wobei U den Kontrollraum $\mathcal{L}^2(0,T;\Omega)$ bezeichnet und Y den Zustandsraum $\mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathcal{H}^1((0,T);\mathcal{H}^{-1}(\Omega))$.

1. Führen Sie zwei Lagrange-Multiplikatoren $p \in P = \mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H}^1_0(\Omega))$ (für die Differenzialgleichung) und $p_0 \in P_0 = \mathcal{L}^2(\Omega)$ (für die Anfangsbedingung) ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion $L : Y \times U \times P \times P_0 \to \mathbb{R}$ auf.

2. Geben Sie mit dem Lagrange-Kalkül notwendige Bedingungen erster Ordnung an, indem Sie die Richtungsableitungen von L nach y, u, p, p_0 ausrechnen.

3. Leiten Sie mittels formaler Variationsrechnung das folgende Optimalitätssystem her:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) - \sigma\Delta y(t) &= \beta u(t) && \text{in } \Omega, && \\
y(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, && \text{(Zustandsgleichung)} \\
y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega; && \\[1ex]
-\dot{p}(t) - \sigma\Delta y(t) &= \sigma_Q(y_Q(t) - y(t)) && \text{in } \Omega, && \\
p(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, && \text{(adjungierte Gleichung)} \\
p(T) &= \sigma_\Omega(y_\Omega - y(T)) && \text{in } \Omega, && \\[1ex]
\kappa u(t) - \beta p(t) &= 0 && \text{in } \Omega. && \text{(Gradientengleichung)}
\end{aligned}$$

   In diesem Kontext bedeutet “formal”, dass Sie hinreichende Glattheit der Funktionen annehmen können.

4. y und p können als Funktionen in u aufgefasst werden. Definieren Sie eine Selbstabbildung $F : U \to U$, so dass $(u^*, y(u^*), p(u^*))$ genau dann das Optimalitätssystem erfüllt, wenn u^* ein Fixpunkt von F ist.

Aufgabe 9. (freiwillig)

1. Formulieren Sie einen Pseudocode, der (y^*, u^*, p^*) mittels Fixpunktiteration bestimmt.
2. Zeigen Sie, dass F für geeignete Parameter κ genau einen Fixpunkt besitzt. Was passiert für $\kappa \to 0$? Welche Konsequenzen hat $\kappa \to 0$ für das Zielfunktional?
3. Das Optimalitätssystem kann auch in einem Schritt gelöst werden statt iterativ. Definieren Sie eine Matrix A und einen Vektor B, so dass für $X^* = (\mathrm{y}^*, \mathrm{u}^*, \mathrm{p}^*)$ gilt $AX^* = B$, wobei $\mathrm{y}^*, \mathrm{u}^*, \mathrm{p}^*$ Diskretisierungen in Ort und Zeit von y^*, u^*, p^* sind. Welche Nachteile hat dieser Ansatz?
4. Transformieren Sie die adjungierte Gleichung via Zeitverschiebung $t \mapsto T - t$ in eine Vorwärtsgleichung, d.h. formulieren Sie eine lineare Wärmeleitungsgleichung, für deren Lösung q gilt $p = q(T - t)$. Was gewinnen Sie dadurch?