Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch

Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

6. Übungsblatt – Abgabe: Montag, 04.02.2013, 8:15 Uhr in der Vorlesung

Aufgabe 11.

Sei $y \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie, dass der in (3.2.9) eingeführten Operator $\tilde{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,

$$\tilde{\mathcal{R}}\psi = \int_0^T \langle y(t), \psi\rangle_W y(t) + \langle \dot{y}(t), \psi\rangle_W \dot{y}(t),$$

folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\tilde{\mathcal{R}}$ ist linear.
2. $\tilde{\mathcal{R}}$ ist beschränkt, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $||\tilde{\mathcal{R}}\psi||_W \leq ||\psi||_W$ für alle $\psi \in \mathbb{R}^m$.
3. $\tilde{\mathcal{R}}$ ist nicht-negativ, d.h. für alle $\psi \in \mathbb{R}^m$ gilt $\langle \tilde{\mathcal{R}}\psi, \psi\rangle_W \geq 0$.
4. $\tilde{\mathcal{R}}$ ist selbstadjungiert, d.h. für alle $\psi, \phi \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\langle \tilde{\mathcal{R}}\psi, \phi\rangle_W = \langle \psi, \tilde{\mathcal{R}}\phi\rangle_W$.

Aufgabe 12.

1. Finden Sie lineare Operatoren $S, \tilde{S} : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;L^2(\Omega))$ und $\hat{y}, \hat{p} \in W(0,T)$, so dass die Lösungen y, p der Zustandsgleichung und der adjungierten Gleichung aus Aufgabe 8.3 gegeben sind als $y = Su + \hat{y}$ und $p = \tilde{S}u + \hat{p}$.
2. Zeigen Sie, dass S und $\tilde{S}$ beschränkt sind. Geben Sie explizit Schranken $C, \tilde{C}$ in Abhängigkeit von den Daten $\sigma, \beta, y_0, \sigma_Q, \sigma_\Omega, y_Q, y_\Omega$ an.

   Hinweis: Energieabschätzungen, Lemma von Gronwall.

Aufgabe 13.

Entwickeln Sie einen Pseudo-Code, der das Optimalitätssystem aus Aufgabe 8.3 mit Modellreduktion löst. Kombinieren Sie dazu den Code aus Aufgabe 9.1 mit der POD-Methode.

Beachten Sie, dass die zur Lösung (y^*, u^*, p^*) gehörige POD-Basis ψ^* a priori nicht bekannt ist und eine zu Beginn willkürlich gewählte POD-Basis keine gute FE-Basis für y^*, p^* sein muss. Es ist daher sinnvoll, die Basis mit aus dem Optimierungsprozess gewonnenen Informationen zu aktualisieren.