



Ausgabe: Freitag, 25.10.2013

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I

1. Übungsblatt

□ Aufgabe 1 (Mengen und Abbildungen)

(4 Punkte)

Seien A, B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Zeigen Sie:

1. Für Teilmengen $X, Y \subseteq B$ gilt $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
2. Für eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist $f(A \setminus U) \supseteq f(A) \setminus f(U)$.
3. Widerlegen Sie die umgekehrte Inklusion $f(A \setminus U) \subseteq f(A) \setminus f(U)$ durch ein konkretes Gegenbeispiel.

□ Aufgabe 2 (Aussagenlogik)

(2 Punkte)

Seien A, B Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Äquivalenzen:

1. $A \Rightarrow B \iff (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ (Kontrapositionsprinzip)
2. $A \Rightarrow B \iff (A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (A \wedge (\neg A))$ (Kontradiktionsprinzip)

□ Aufgabe 3 (Mechanische Anwendung von Definitionen)

(10 Punkte)

- a) Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *dummbrumm*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x - 3)/4 = m$. Die Zahl heißt *brummdumm*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.
- b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schnickschnack*, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle x , die brummdumm sind. Die Funktion heißt *schnackschnick*, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle x , die dummbrumm sind.
- c) Sei F die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : F \rightarrow F$ heißt *pingpong*, wenn für jede schnackschnick Funktion f das Bild $T(f)$ auch schnackschnick ist. Die Funktion T heißt *pongping*, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

1. Beweisen Sie: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.
2. Gilt auch die Umkehrung des Satzes?
3. Zeigen Sie mit (1), dass f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.
4. Benutzen Sie das Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, um zu zeigen, dass die Umkehrung von (3) falsch ist.
5. Untersuchen Sie, ob die Funktion $T : F \rightarrow F$, $T(f) = 2f + 1$, pingpong oder pongping ist.
6. Zeigen Sie, dass die Verkettung von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.

□ Aufgabe 4 (Eine Knobelaufgabe)

(4 Punkte)

Max und Moritz zerreißen die Schulordnung. Max zerreißt jedes Stück, das ihm in die Hände fällt, in drei Fetzen, Moritz in fünf. Als der Lehrer Lempel die beiden erwischt, verlangt er von ihnen, die Schulordnung wieder zusammenzukleben. Widerwillig fügen sie sich der Anweisung. Zusammen finden sie einhundert Papierfetzen. Kann die zusammengeklebte Schulordnung vollständig sein?