Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 01.11.2013
Abgabe: Donnerstag, 07.11.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
2. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 5** (Injektivität & Surjektivität) (4 Punkte)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

1. Ist die Verkettung $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
2. Sind $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

☐ **Aufgabe 6** (Ungleichungen) (4 Punkte)

Seien $a, b, c, d \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab, \qquad \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd, \qquad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

Hinweis: Um die dritte Ungleichung zu zeigen, wählen Sie in der zweiten $d = \frac{a+b+c}{3}$ und lösen geschickt auf.

☐ **Aufgabe 7** (Arithmetisches, geometrisches & harmonisches Mittel) (4 Punkte)

Seien $a_1, ..., a_n$ strikt positive Zahlen, $n \geq 2$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdots a_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}\right)^n.$$

☐ **Aufgabe 8** (Potenzsummenformeln) (8 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Gaußsche Summationsformel

$$S_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

1. Beweisen Sie per Induktion die Quadratsummenformel

$$S_2(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

2. Leiten Sie eine entsprechende Formel für Kubiksummen $S_3(n) := \sum_{k=1}^{n} k^3$ her.

Hinweis: Machen Sie den *heuristischen* Ansatz $S_3(n) = a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ und bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, ..., a_4$ als Lösung eines LGS (linearen Gleichungssystems). Beachten Sie: Damit haben Sie noch nicht bewiesen, dass die entstehende Summationsformel gilt, da a priori nicht klar ist, dass sich die Summe überhaupt als Polynom vierten Grades in n darstellen lässt. Stattdessen haben Sie gezeigt: *Wenn* eine solche Polynomdarstellung möglich ist, *dann* mit den von Ihnen ermittelten Koeffizienten $a_0, ..., a_4$. Vervollständigen Sie den Beweis daher, indem Sie wie gewohnt die ermittelte Formel per Induktion beweisen.