Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 08.11.2013
Abgabe: Donnerstag, 14.11.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
3. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 9** (Körperaxiome) (4 Punkte)

1. Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie:
   a) Das neutrale Element der Addition und das neutrale Element der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.
   b) K ist *nullteilerfrei*, d.h. $\forall x, y \in K : xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$
   c) Es gelten die Vorzeichenregeln $(-1)x = -x$ und $(-x)(-y) = xy$ für beliebige $x, y \in K$.

   Hinweis: Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, welche der folgenden Eigenschaften eines Körpers Sie benutzt haben: Assoziativität von + (A1), Kommutativität von + (A2), Existenz der Null (A3), Existenz der additiv Inversen (A4), Assoziativität von $\cdot$ (M1), Kommutativität von $\cdot$ (M2), Existenz der Eins (M3), Existenz der multiplikativ Inversen (M4), Distributivität (D).

2. Betrachten Sie die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

   Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

☐ **Aufgabe 10** (Mächtigkeit von Mengen) (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ *gleichmächtig* sind, d.h. dass eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen existiert.
2. Zeigen Sie, dass eine beliebige Menge M nie gleichmächtig ist wie ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$.

   Hinweis: Führen Sie die Annahme, es existierte eine surjektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$, mit Hilfe der speziellen Menge $\{m \in M \mid m \notin f(m)\} \in \mathcal{P}(M)$ zu einem Widerspruch.

☐ **Aufgabe 11** (Schranken) (4 Punkte)

1. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A \;\&\; b \in B\}$.

   Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist, und bestimmen Sie das Supremum von $A + B$.
2. Bestimmen Sie – falls vorhanden – Maximum, Minimum, Supremum und Infimum von $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

☐ **Aufgabe 12** (Allgemeine Potenzsummenformel) (8 Punkte)

Für beliebiges $p \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Bestimmen Sie $S_0(n)$ und beweisen Sie die rekursive Potenzsummenformel

$$S_{p-1}(n) = \frac{1}{p}(n+1)^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}S_k(n) - \frac{1}{p} \qquad (p \geq 2).$$

   Hinweis: Vereinfachen Sie den Term $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^p - k^p$ und wenden Sie anschließend den Binomischen Lehrsatz an.

2. Berechnen Sie mit der Formel S_1, S_2, S_3, S_4. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 8.
3. Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 8 vorgestellte, heuristische Ansatz immer zum Ziel führt, d.h. dass die p-te Potenzsumme stets als Polynom $(p+1)$-ten Grades in der Variablen n dargestellt werden kann.