Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 15.11.2013
Abgabe: Donnerstag, 21.11.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
4. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 13** (quadratische Gleichungen) (4 Punkte)

1. Seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_2 \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2} \text{ oder } x = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}.$$

2. Zu $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ bezeichne $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)$ die Formel

$T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)$: "Die Gleichung $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ besitzt genau k reelle Lösungen".

Bestimmen Sie zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Menge $M_k = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \mid T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k)\}$.

☐ **Aufgabe 14** (komplexe Zahlen) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie: $(\frac{3}{2} + 2i)^2 = 3(\frac{3}{2} + 2i) - \frac{25}{4}$.
2. Betrachten Sie die reelle, rekursive Zahlenfolge $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_n = 3a_{n-1} - \frac{25}{4}a_{n-2}$ für $n \geq 2$.

   Beweisen Sie:
$$a_n = \mathrm{Re}\left(\left(1 - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{3}{2} + 2i\right)^n\right).$$
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der komplexen Gleichung $z - |z| = 1 + 2i$.
4. Finden Sie alle komplexen Zahlen, welche konjugiert zu ihrem Quadrat sind.

☐ **Aufgabe 15** (Cauchyfolgen) (7 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.
2. Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist.
3. Betrachten Sie die rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit
$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$
   Zeigen Sie, dass es sich um rationale Cauchyfolgen handelt, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent sind.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folgen eine *Intervallschachtelung* bilden, d.h. dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ und $|b_n - a_n| \to 0$. Folgern Sie daraus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren und damit Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ sind. Berechnen Sie abschließend den Grenzwert in $\mathbb{R}$.

☐ **Aufgabe 16** (Grenzwertsätze) (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Zahlenfolgen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},$$

wobei in letzterem Fall zusätzlich gelten möge $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.