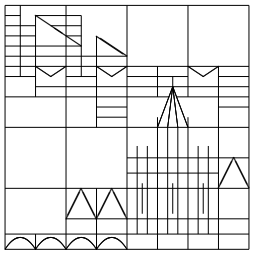
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014



Ausgabe: Freitag, 22.11.2013
Abgabe: Donnerstag, 28.11.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
5. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 17** (Grenzwerte von Folgen) (4 Punkte)

Verifizieren Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1, \qquad \forall x\in\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

☐ **Aufgabe 18** (Konvergenzgeschwindigkeit) (5 Punkte)

Um ein Maß dafür zu erhalten, wie schnell eine Folge konvergiert, führen wir auf der Menge der reellen Zahlenfolgen die folgende Relation ein:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists k, K>0 : \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}, n>N : k\,|a_n| \le |b_n| \le K\,|a_n|.$$

Wir sagen, eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert mit Rate* $\alpha>0$, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$, und nennen α dann die *Konvergenzordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie, dass die Konvergenzordnung einer Nullfolge eindeutig bestimmt ist.
3. Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlenfolgen Nullfolgen sind, und bestimmen Sie ihre Konvergenzordnungen:

$$a_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}, \qquad b_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^3}, \qquad c_n = \frac{\sqrt[5]{n^4}}{n+4}, \qquad d_n = \frac{3}{\sqrt{2n^2-1}}, \qquad e_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

☐ **Aufgabe 19** (Die Eulersche Zahl e) (8 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bilden:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \qquad\qquad b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!\,n},$$

   Der Grenzwert $\lim a_n = \lim b_n$ wird mit e bezeichnet und *Eulersche Zahl* genannt.

2. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $c_n = (1+\frac{1}{n})^n$, ebenfalls gegen e konvergiert.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und $c_n \le a_n$ gilt, die Folge also speziell beschränkt durch e ist und damit konvergiert. Weisen Sie anschließend nach, dass $\lim c_n \ge a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt ist.

☐ **Aufgabe 20** (Anwendung der Grenzwertsätze) (3 Punkte)

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$. Überprüfen Sie die folgende Argumentation auf Stichhaltigkeit und das Ergebnis auf Korrektheit:

Induktives Anwenden des ersten Grenzwertsatzes ergibt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) = \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte der einzelnen Summandenfolgen $(\frac{N}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ *für* $N=1,2,...$ *und somit ist* $\lim a_n = 0$.