



Ausgabe: Freitag, 29.11.2013

Abgabe: Donnerstag, 05.12.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I

6. Übungsblatt

□ **Aufgabe 21** (Paradoxon des Zenon von Elea (495-435 v.Chr.)) (4 Punkte)

Der griechische Held Achilles veranstaltet einen Wettlauf mit einer (ziemlich schnellen) Schildkröte. Er kann zehnmal schneller laufen als die Schildkröte und gibt ihr deshalb einen Vorsprung von zehn Ellen. Achilles und die Schildkröte starten zur selben Zeit. Hat Achilles die ersten 10 Ellen durchgelaufen, so ist die Schildkröte um eine Elle vorangekommen. Hat Achilles diese Elle zurückgelegt, beträgt der Vorsprung der Schildkröte noch $1/10$ Ellen. Bringt Achilles diese Strecke hinter sich, hat die Schildkröte immer noch einen Vorsprung von $1/100$ Ellen etc. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber er wird nie Null. Deshalb, so argumentiert Zenon, kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

1. Berechnen Sie mit der Formel "Geschwindigkeit = zurückgelegte Strecke pro Zeit", wie lange es dauert, bis Achilles die Schildkröte eingeholt hat, und welche Strecke die beiden dann zurückgelegt haben, wenn Achilles' Geschwindigkeit zehn Ellen pro Sekunde beträgt.
2. Schreiben Sie die von Achilles zurückgelegte Strecke gemäß der Argumentation von Zenon als unendliche Reihe und lösen Sie den scheinbaren Widerspruch durch Berechnung von deren Grenzwert auf.

□ **Aufgabe 22** (Konvergenz von Reihen) (8 Punkte)

1. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+(-1)^n}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte, sofern existent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Schreiben Sie die ersten zwei Reihen als Teleskopsummen. Für die dritte komplettieren Sie den Beweis von Satz 4.3.

3. Zeigen Sie, dass für die *Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ gilt: $\zeta(s)$ konvergiert $\Leftrightarrow s > 1$.

□ **Aufgabe 23** (Topologie) (4 Punkte)

1. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$. Zeigen Sie, dass (X, δ) ein metrischer Raum ist und dass eine Menge in (X, δ) genau dann offen ist, wenn sie in (X, d) offen ist.
2. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge U eines topologischen Raumes X genau dann offen ist, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.
3. Wir setzen $\mathcal{N} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus U \text{ ist endlich}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}$ eine Topologie auf $\mathbb{N}$ definiert, in der das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht gilt.

□ **Aufgabe 24** (Fixpunktproblem) (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2x+1}{2x+2}$ genau einen Fixpunkt besitzt, und berechnen Sie diesen.