Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 06.12.2013
Abgabe: Donnerstag, 12.12.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
7. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 25** (Eine weitere Knobelaufgabe) (5 Punkte)

Eine Rennschnecke kriecht über ein beliebig elastisches Gummiband von anfangs einem Meter Länge. Sie startet an einem Ende und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von zehn Zentimetern pro Minute. Jede Minute wird das Band um einen Meter gleichmäßig über die gesamte Länge gedehnt.

1. Zeigen Sie, dass die Schnecke innerhalb einer endlichen Zeitspanne das andere Ende des Bandes erreicht.
2. Berechnen Sie, wie lange die Schnecke zur Überquerung des Bandes benötigt. Wie groß muss die Geschwindigkeit der Schnecke sein, um das Band innerhalb eines Tages zu überqueren? ($\star$)

   Hinweis: Zur Beantwortung können Sie technische Hilfsmittel wie einen programmierbaren Taschenrechner benutzen.
3. Recherchieren Sie die Bedeutung der *Euler-Mascheronischen Konstante*. Berechnen Sie mit dieser näherungsweise erneut die Ergebnisse aus (2). Vergleichen Sie die Resultate. ($\star$)

☐ **Aufgabe 26** (Fibonacci-Folge und Goldener Schnitt) (5 Punkte)

Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert via $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ $(n \geq 0)$. Zeigen Sie:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f_n f_{n+2}} = 1.$$

Der Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird als der *Goldene Schnitt* bezeichnet.

☐ **Aufgabe 27** (Hilberträume) (5 Punkte)

Seien X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definiert eine Norm auf X.

   Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Satz 5.49).
2. Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Veranschaulichen Sie mit einer Skizze, was dieser Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras aus der ebenen Geometrie zu tun hat.
3. Es gilt die Parallelogrammregel $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für alle $x, y \in X$.

☐ **Aufgabe 28** (Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2) (5 Punkte)

Bekanntlich bildet die Menge der Folgen $\mathcal{A} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}\}$ mit den Operationen $\oplus : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\otimes : \mathbb{R}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\lambda \otimes (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum a_n^2 < \infty\} \subseteq \mathcal{A}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{A}$ ist, d.h. dass die Nullfolge in ℓ^2 liegt und für alle Folgen $a, b \in \ell^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten $a \oplus b \in \ell^2$ sowie $\lambda \otimes a \in \ell^2$.
2. Zeigen Sie, dass ℓ^2 mit $\langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum a_n b_n$ einen Hilbertraum bildet, d.h. dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2}$ ein Skalarprodukt ist.
3. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $a, b \in \ell^2$ die folgende Abschätzung erfüllt ist: ($\star$)

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,|b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2.$$