Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 13.12.2013
Abgabe: Donnerstag, 19.12.2013, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
8. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 29** (Funktionsgrenzwerte) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (n, m \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 3x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (a_n, b_m \neq 0).$$

☐ **Aufgabe 30** (Konsequenzen der Stetigkeit) (5 Punkte)

1. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f = g$ auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $f = g$ gilt auf ganz $\mathbb{R}$.
2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = cx$.
3. Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige *Selbstabbildung*, d.h. $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. $(\star\star)$

☐ **Aufgabe 31** (Verkettung stetiger Funktionen) (3 Punkte)

Seien $f : F \to \mathbb{R}$ und $g : G \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(F) \subseteq G$. Weiter sei f stetig in $x_0 \in F$ und g sei stetig in $f(x_0) \in G$. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : F \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist.

☐ **Aufgabe 32** (Lipschitz-, Hölder- & gleichmäßige Stetigkeit) (6 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Funktionen Hölder-stetig sind, Hölder-stetige Funktionen gleichmäßig stetig und gleichmäßig stetige Funktionen stetig.
2. Überprüfen Sie die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf den Definitionsbereichen $D_1 = [1, \infty)$ und $D_2 = [0, \infty)$ auf Lipschitz-Stetigkeit, Hölder-Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Stetigkeit.