Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 10.01.2014
Abgabe: Donnerstag, 16.01.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
10. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 37** (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) (4 Punkte)

Das Produkt zweier Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ist nach der *Cauchyschen Produktformel* gegeben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \text{wobei} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

☐ **Aufgabe 38** (Additionstheoreme der Trigonometrie) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Produktformel, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \text{wobei} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \& \ \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ($\star$)

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

3. Beweisen Sie die folgende Summenformnel für die Tangensfunktion: ($\star$)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \text{wobei} \quad \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Zeigen Sie, dass alle $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Halbwinkelformel genügen: ($\star$)

$$1 - \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

☐ **Aufgabe 39** (Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Ermitteln Sie die natürlichen Definitionsbereiche und die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = (x^x)^x, \qquad f_2(x) = x^{(x^x)}, \qquad f_3(x) = \sqrt[x]{\ln x}, \qquad f_4(x) = \ln(\ln(x^2+x+1)).$$

☐ **Aufgabe 40** (Differenzenquotient & Differenzialquotient) (7 Punkte)

Zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $f : [x_0, x_0+1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt x_0 *linksseitig differenzierbare* Funktion, d.h. für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [x_0, x_0+1]$ mit $t_n \to x_0$ konvergiere der Differenzenquotient $\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}$ in $\mathbb{R}$ gegen den gleichen Wert. Weiter sei $f(x_0) > 0$.

Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $x_n = \left(\frac{f(x_0+\frac{1}{n})}{f(x_0)} \right)^n$, konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe der logarithmierten Folge $y_n = \ln x_n$.