



**Ausgabe:** Freitag, 17.01.2014

**Abgabe:** Donnerstag, 23.01.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

## Analysis I

### 11. Übungsblatt

**Aufgabe 41** (Ableitung von Umkehrfunktionen) (3 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für den *Arcustangens*  $\arctan = \tan^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
2. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x + e^x$  invertierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt  $x = 1$  sowie den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1})'(x)$ . (★★)

**Aufgabe 42** (Der Satz von l'Hopital) (6 Punkte)

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \arctan x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x}.$$

2. Weisen Sie nach, dass die Folgen  $(\frac{1}{\exp(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\frac{1}{\ln(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  keine Wachstumsraten besitzen. (★★)

**Hinweis:** Die Regeln von l'Hopital finden sich auf Seite 72 des Kompendiums.

**Aufgabe 43** (Stammfunktionen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie auf geeigneten Definitionsbereichen Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \int \sqrt{\sin x} \cos x dx, \quad \int \frac{\ln|x|}{x} dx, \quad \int \frac{1}{x \ln|x|} dx.$$

**Aufgabe 44** (Rotationskörper) (5 Punkte)

Rotiert der Graph einer stetigen Funktion  $f \in C^0([a, b], [0, c])$  um die  $x$ -Achse, so entsteht ein dreidimensionaler Körper, dessen *Volumen* und *Oberfläche* gegeben sind durch die *Guldinschen Formeln*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \quad O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $R$  durch Rotation eines Kreisbogens um die  $x$ -Achse.