Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 24.01.2014
Abgabe: Donnerstag, 30.01.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
12. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 45** (Partialbruchzerlegung) (0 Punkte)

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x. \qquad (\star\star\star)$$

Hinweis: Über $\mathbb{R}$ zerfällt nach einer Variante des Fundamentalsatzes der Algebra jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $n \geq 1$, in lineare und quadratische Faktoren $(x-x_1)\cdots(x-x_k)\cdot((x-\xi_1)^2+(\xi_1')^2)\cdots((x-\xi_l)^2+(\xi_l')^2)$ mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) $x_1,...,x_k,\xi_1,...,\xi_l,\xi_1',...,\xi_l' \in \mathbb{R}$, wobei die Polynome $(x-\xi_i)^2+(\xi_i')^2$, $i=1,...,l$, *unzerlegbar* sind, d.h. keine reelle Nullstelle besitzen. Falls die Elemente $x_1,...,x_k,(\xi_1,\xi_1'),...,(\xi_l,\xi_l')$ *zusätzlich* paarweise verschieden sind, so hat die zugehörige Partialbruchzerlegung mit geeigneten reellen Koeffizienten $z_1,...,z_k,\zeta_1,...,\zeta_l,\zeta_1',...,\zeta_l'$ die Gestalt

$$p(x) = \frac{z_1}{x-x_1} + \dots + \frac{z_k}{x-x_k} + \frac{\zeta_1 x + \zeta_1'}{(x-\xi_1)^2+(\xi_1')^2} + \dots + \frac{\zeta_l x + \zeta_l'}{(x-\xi_l)^2+(\xi_l')^2}.$$

☐ **Aufgabe 46** (Konvexität) (8 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:
$$f \text{ ist konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in D : f''(x) \geq 0.$$
2. Sei $a > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass der Logarithmus $\log_a$ zur Basis a konkav ist.

☐ **Aufgabe 47** (Youngsche Ungleichung) (4 Punkte)

Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zeigen Sie mit Aufgabe 42.2, dass für alle $x, y \geq 0$ gilt $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

☐ **Aufgabe 48** (p-Norm für stetige Funktionen) (8 Punkte)

1. Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie die *Hölder-Ungleichung*
$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$
2. Seien $p \in [1,\infty)$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie mit (1) die *Minkowski-Ungleichung*
$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$
3. Folgern Sie daraus, dass auf dem Raum der über $[a,b]$ stetigen Funktionen eine Norm gegeben ist durch
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$