Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Oliver Lass, Roberta Mancini
Wintersemester 2013/2014

Ausgabe: Freitag, 31.01.2014
Abgabe: Donnerstag, 06.02.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis I
13. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 49** (Regeln zur partiellen Integration und Substitution) (0 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{e}^{e^2} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x. \qquad (\star\star\star)$$

☐ **Aufgabe 50** (Anwendungen zum Hauptsatz der Differenzial- & Integralrechnung) (6 Punkte)

1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

2. Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung von F.

☐ **Aufgabe 51** (Uneigentliche Integrale) (6 Punkte)

Überprüfen Sie, für welche $s \geq 0$ die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

☐ **Aufgabe 52** (Vertauschung von Limes und Integral) (8 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n\sin(nx)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{n}]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gegen eine Grenzfunktion konvergiert, dass Integration und Grenzwertbildung aber nicht vertauschen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}$ für $x \in [0,n]$ und $f_n(x) = 0$ sonst gleichmäßig konvergent ist, dass aber dennoch gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$