



Ausgabe: Freitag, 07.02.2014

Abgabe: Die Aufgaben sind freiwillig und werden weder korrigiert noch bewertet.

Analysis I

14. Übungsblatt (freiwillig)

Aufgabe 53 (Differenzierbarkeit & Differenzenquotient) (0 Punkte)

Seien $\alpha > 1$, $a < 0 < b$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ für alle $x \in (a, b)$.

Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(x_0)$.

Aufgabe 54 (Anwendungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung) (0 Punkte)

1. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(x) \leq \lambda f(x)$ auf $[0, 1]$ für ein $\lambda > 0$.

Zeigen Sie, dass $f \leq 0$ auf $[0, 1]$ erfüllt ist.

2. Zeigen Sie: Für differenzierbares $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x+1) - f(x) = \xi$.

3. Überprüfen Sie, ob das folgende *Randwertproblem* eine stetig differenzierbare Lösung $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt:

$$f'(x) = f^2(x) + 4 \text{ für } x \in (1, 3), \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 6.$$

Aufgabe 55 (Differenzierbarkeit & Differenzialquotient) (0 Punkte)

Seien $a < x_0 < b$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ und $y_n \rightarrow x_0$.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0)$$

erfüllt ist, falls $x_n < x_0 < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 56 (Weitere Beispiele zum Satz von l'Hopital) (0 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x) \ln |1 - x|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(n - \frac{1}{2})}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}.$$