Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Tutorium Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Euler-Differenzialgleichungen

Analysis III
Ergänzungen zum 7. Übungsblatt

Lösungstheorie von Eulergleichungen.

Wir betrachten auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^+$ die skalare Differenzialgleichung n-ter Ordnung

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Dabei sind die $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gegebene Parameter mit Leitkoeffizient $a_n \neq 0$. Wir substituieren $y = x^\rho$ und erhalten die zugehörige charakteristische (algebraische) Gleichung $\chi(\rho) = 0$ mit

$$\chi(\rho) = a_n[\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1)] + a_{n-1}[\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+2)] + \cdots + a_1\rho + a_0 = 0;$$

passende Werte ρ sind in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_0, ..., a_n$ zu bestimmen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren n Lösungen der charakteristischen Gleichung, genauer gibt es $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., r$, und $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = r+1, ..., s$, sodass die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von χ gerade die ρ_i sind und die paarweise komplexen gerade die $\rho_j = \alpha_j + i\beta_j$ und deren Konjugierte $\bar{\rho}_j = \alpha_j - i\beta_j$. Bezeichnen noch m_i, m_j die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten, dann ist ein reelles Fundamentalsystem der Euler-Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}
x^{\rho_i}(\ln x)^k, &\qquad k = 0, ..., m_i - 1 \ \&\ i = 1, ..., r, \\
x^{\alpha_j}(\ln x)^k \cos(\beta_j \ln x), &\qquad k = 0, ..., m_j - 1 \ \&\ j = r+1, ..., s, \\
x^{\alpha_j}(\ln x)^k \sin(\beta_j \ln x), &\qquad k = 0, ..., m_j - 1 \ \&\ j = r+1, ..., s.
\end{aligned}$$