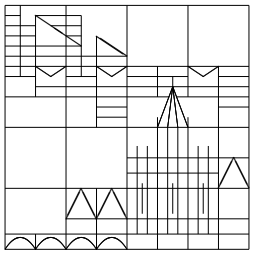
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015



Ausgabe: Donnerstag, 23.10.2014
Abgabe: Donnerstag, 30.10.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
1. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 1** (Ordnungsreduktion) (3 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass sich jede explizite skalare Differenzialgleichung k-ter Ordnung
$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$
in ein *autonomes* System erster Ordnung überführen lässt.

2. Formen Sie das folgende Differenzialgleichungssystem in ein äquivalentes System erster Ordnung um:
$$v''''(t) - \alpha u''(t) = f(t), \qquad u''(t) + \beta v(t) = g(t).$$

3. Seien $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $p > 0$ und $q, r, f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$. Formen Sie das *Sturm-Liouville-Randwertproblem*
$$\forall t \in I : -(pu')'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \qquad u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$
in ein äquivalentes, *explizites* System erster Ordnung der Form $x' = Ax + b$ um.

☐ **Aufgabe 2** (Existenz und Eindeutigkeit für Randwertprobleme) (5 Punkte)

Die skalare lineare Differenzialgleichung $y''(t) + y(t) = 1$ besitzt für beliebige Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung $y(t) = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + 1$. Finden Sie jeweils Randwerte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass ...

1. ... zu den Randbedingungen $y(a) = 0$ und $y(b) = 0$ genau eine Lösung existiert;
2. ... zu den Randbedingungen $y(a) = 0$ und $y(b) = 1$ keine Lösung existiert.
3. ... zu den Randbedingungen $y(a) = 1$ und $y(b) = 1$ unendlich viele Lösungen existieren.

☐ **Aufgabe 3** (Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertprobleme) (5 Punkte)

Überprüfen Sie das folgende Anfangswertproblem auf dem Intervall $[1, \infty)$ *ohne Verwendung der Lösungstheorie aus Kap. 16* auf die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und berechnen Sie diese gegebenenfalls:
$$f(t, y(t), y'(t)) = 0, \qquad y(t_\circ) = y_\circ \qquad \text{mit} \qquad f(u, v, w) = uvw - \ln(u), \qquad (t_\circ, y_\circ) = (1, 0).$$

☐ **Aufgabe 4** (Charakteristiken) (7 Punkte)

Seien $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ eine injektive Kurvenparametrisierung, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\xi\| = 1$ und $t_\circ \in \mathbb{R}$, so dass $\{\xi, \dot{\gamma}(t_\circ)\}$ linear unabhängig ist. Gesucht sind eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $x_\circ = \gamma(t_\circ)$ und eine Funktion $u \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, welche die folgende partielle Differenzialgleichung löst:
$$\begin{cases} \langle \xi, \nabla u(x) \rangle = 0 & \text{für alle } x \in U \\ u(\gamma(t)) = f(t) & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \gamma(t) \in U \end{cases}.$$

1. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass u auf der durch $s \mapsto \gamma(t) + s\xi$ parametrisierten Geraden eindeutig bestimmt ist durch $u(\gamma(t) + s\xi) = f(t)$.

   Hinweis: Eingeschränkt auf diese Gerade wird die partielle zu einer gewöhnlichen Differenzialgleichung.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $G(s, t) = \gamma(t) + s\xi$ lokal bei $(0, t_\circ)$ invertierbar ist und dass $u = f \circ G_2^{-1}$ eine $\mathcal{C}^1$-Lösung der Differenzialgleichung ist (wobei G_2^{-1} die zweite Komponente von G^{-1} bezeichnet).