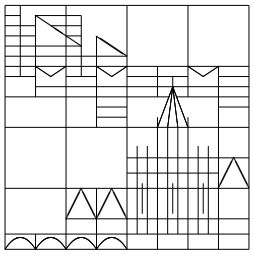
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015



Ausgabe: Donnerstag, 30.10.2014
Abgabe: Donnerstag, 06.11.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
2. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 5** (Fixpunktsatz von Weißinger) (5 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $X \supseteq U \neq \emptyset$ abgeschlossen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ und $\Phi : U \to U$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall u, v \in U : \|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\| \leq a_n \|u - v\|, \qquad \text{wobei} \qquad \Phi^n = \Phi \circ \cdots \circ \Phi.$$

1. Zeigen Sie: Φ besitzt genau einen *Fixpunkt* $\bar{u} \in U$, d.h. $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$ für genau ein $\bar{u} \in U$.
2. Seien $u_\circ \in U$ beliebig und $u_n = \Phi^n(u_\circ)$. Zeigen Sie: $\bar{u} = \lim u_n$.
3. Weisen Sie nach, dass die folgende Fehlerabschätzung erfüllt ist: $\|\bar{u} - u_n\| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right) \|u_1 - u_\circ\|$.
4. Begründen Sie, dass der Banachsche Fixpunktsatz ein Spezialfall dieses Satzes ist.

☐ **Aufgabe 6** (Fixpunkt eines Integrationsoperators) (5 Punkte)

Seien $(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_\circ| \leq r \;\&\; \|y - y_\circ\|_2 \leq R\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $M, L \geq 0$ mit $\|f(x, y)\|_2 \leq M$ (lokale Beschränktheit) und $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_2 \leq L\|y - \tilde{y}\|_2$ (lokale Lipschitz-Stetigkeit). Seien $\varepsilon = \min(r, \frac{R}{M})$ und $I = [x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon]$. Sei der Raum $X = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und $U = \{y \in X \mid \|y - y_\circ\|_\infty \leq R\}$. Zeigen Sie:

1. $\Phi : X \to X$, definiert durch $(\Phi(y))(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$, ist eine *Selbstabbildung* auf U, d.h. $\Phi(U) \subseteq U$.
2. Für $a_n = \frac{1}{n!}(\varepsilon L)^n$ gilt $\|\Phi^n u - \Phi^n v\|_\infty \leq a_n \|u - v\|_\infty$.
3. Φ besitzt genau einen Fixpunkt in U.

☐ **Aufgabe 7** (Lokaler Existenz- & Eindeutigkeitssatz von Picard & Lindelöf) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass genau eine Lösung $\bar{y} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ zu $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_\circ) = y_\circ$ existiert.
2. Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ mit $y_0 = y_\circ$ und $y_{n+1} = \Phi(y_n)$ gleichmäßig gegen $\bar{y}$ konvergiert mit $\|\bar{y} - y_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}(\varepsilon L)^n e^{\varepsilon L} \|y_1 - y_0\|_\infty$.
3. Sei $(\varepsilon, L) = (1, 10)$. Finden Sie für $\epsilon = 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-20}$ minimale N_1, N_2 mit $(\frac{L}{L+1})^{N_1} < \epsilon$ & $\frac{1}{N_2!}(\varepsilon L)^{N_2} < \epsilon$.

☐ **Aufgabe 8** (Glättungsfunktion) (5 Punkte)

Bemerkung: Lokalisierung und Globalisierung gehören zu den wichtigsten, wenn auch etwas technischen, Konzepten fast aller mathematischer Disziplinen. Sie werden beispielsweise benutzt, um unter restriktiven Vorraussetzungen gewonnene globale Existenzresultate unter schwächeren Voraussetzungen zumindest lokal zu erhalten (etwa in der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf, wo Daten glatt abgeschnitten werden) bzw. umgekehrt, um mehrere lokale Existenzaussagen zu einer globalen zusammenzusetzen (vgl. etwa die Partition der Eins beim Satz von Gauß).

Ziel ist es zunächst, eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}} = [0, \infty)$ zu konstruieren.

1. Geben Sie zu beliebigem $k \in \mathbb{N}$ ein $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\} = (0, \infty)$ und $\varphi \notin \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ an.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie: $t^n e^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$.
3. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ für $x > 0$ und $\varphi(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n vom Grad höchstens $2n$ gibt, so dass für die n-te Ableitung von φ gilt $\forall x > 0 : \varphi^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x})$.
4. Folgern Sie daraus: $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\varphi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.