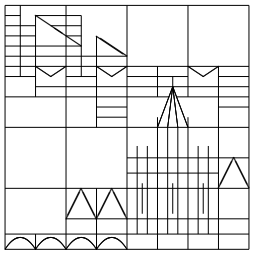
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015



**Ausgabe:** Donnerstag, 06.11.2014
**Abgabe:** Donnerstag, 13.11.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

# Analysis III
# 3. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 9** (Richtungsfeld) (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $ty(t)y'(t) = \ln(t)$ & $y(t_\circ) = y_\circ$ für $t_\circ > 0$ und $y_\circ \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie zu jedem $(t_\circ, y_\circ)$ die Lösungen der Differenzialgleichung sowie das maximale Existenzintervall.
2. Zeichen Sie für $t_\circ \in (0, 2]$ und $y_\circ \in [-2, 2]$ das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.

---

☐ **Aufgabe 10** (Separation der Variablen) (3 Punkte)

Lösen Sie die folgenden skalaren separablen Gleichungen und geben Sie die maximalen Existenzintervalle an:

$$\dot{y}(t) = 1 + y^2(t) \;\&\; y(\tfrac{\pi}{2}) = -1, \qquad \dot{y}(t)y(t) = t \;\&\; y(0) = 1, \qquad t\dot{y}(t) = y(t)\ln y(t) \;\&\; y(1) = e.$$

---

☐ **Aufgabe 11** (Substitutionsansatz) (4 Punkte)

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $y$ des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = f(ay(t) + bt + c)$ mit $y(t_0) = y_0$ die folgende implizite Gleichung erfüllt ist:

$$t - t_0 = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{af(x) + b}\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi(t) = ay(t) + bt + c.$$

2. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie die maximalen Existenzintervalle an:

$$\dot{y}(t) = \exp(y(t) + t) - 1 \;\&\; y(0) = 0, \qquad \dot{y}(t) = \cos^2(2y(t) + t - 2) - \tfrac{1}{2} \;\&\; y(0) = 1.$$

---

☐ **Aufgabe 12** (Glattes Abschneiden) (9 Punkte)

Sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die in Aufgabe 8 definierte Glättungsfunktion mit $\mathrm{supp}(\varphi) = (0, \infty)$.

1. Zeigen Sie, dass für die $n$-te Ableitung der Funktion $\psi(x) = \varphi(1 - x) \cdot \varphi(1 + x)$ gilt

$$\psi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(1 + x)(-1)^k \varphi^{(k)}(1 - x).$$

2. Zeigen Sie, dass sich $\psi$ in keiner Umgebung von $x = -1$ in eine dort gegen $\psi$ konvergierende Taylorreihe entwickeln lässt.
3. Seien $\varepsilon > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Konstruieren Sie aus $\psi$ eine Funktion $\psi_{\varepsilon,\xi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\psi_{\varepsilon,\xi}) = [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, $\psi_{\varepsilon,\xi}(x) > 0$ für $x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}} \psi_{\varepsilon,\xi}(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
4. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die *Faltung* $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y$ gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
5. Seien $\Omega = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $K = [\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$, $\varepsilon < \min\{1, \frac{1}{2}(\alpha - a), \frac{1}{2}(b - \beta)\} > 0$ und $U_\varepsilon = (\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ gilt. Bezeichne $\chi_\varepsilon$ die charakteristische Funktion auf $U_\varepsilon$, d.h. $\chi_\varepsilon(x) = 1$ für $x \in U_\varepsilon$ und 0 sonst. Zeigen Sie: $\varphi = \psi_{\varepsilon,0} * \chi_\varepsilon$ liegt in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, es gilt $\varphi = 1$ auf $K$ und $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ ist kompakt.