Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 13.11.2014
Abgabe: Donnerstag, 20.11.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
4. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 13** (Variation der Konstanten) (4 Punkte)

1. Lösen Sie mittels Variation der Konstanten das skalare lineare Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2ty(t) + t^3$ mit allgemeinem Anfangswert $y(0) = y_\circ$.
2. Lösen Sie die Bernoulli-Gleichung $\dot{y}(t) = -ty(t) + ty^3(t)$ mit Anfangswert $y(0) = 1$ mittels Transformation auf ein äquivalentes lineares Problem.

☐ **Aufgabe 14** (Fundamentalsystem) (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des Systems linearer Differenzialgleichungen

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_4(t) \qquad \dot{x}_3(t) = x_1(t) \qquad \dot{x}_4(t) = x_2(t).$$

☐ **Aufgabe 15** (Lineare Probleme höherer Ordnung) (4 Punkte)

Lösen Sie das lineare Anfangswertproblem

$$\ddot{\ddot{x}}(t) = x(t) + 1, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0, \qquad \ddot{x}(0) = 0, \qquad \dddot{x}(0) = 0.$$

☐ **Aufgabe 16** (Lösen durch Jordanisierung) (8 Punkte)

1. Betrachten Sie die lineare Differenzialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $v_1 = (1, 0, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 1)$ eine Basis des Eigenraums der Systemmatrix bilden, die sich aber nicht durch einen Hauptvektor zu einer Jordanbasis ergänzen lässt.

   b) Bestimmen Sie eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform des Problems.

2. a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J und eine zugehörige Transformationsmatrix U – deren Spalten gerade eine Jordanbasis bilden – zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   so dass die Matrixgleichung $A = UJU^{-1}$ erfüllt ist.

   b) Lösen Sie das homogene Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.