



Ausgabe: Donnerstag, 20.11.2014

Abgabe: Donnerstag, 27.11.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III

5. Übungsblatt

□ Aufgabe 17 (Phasenfluss)

(5 Punkte)

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zu $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ bezeichne $J(t_0, x_0) \subseteq J$ das maximale Existenzintervall der Lösung x zur autonomen Gleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = x_0$. Wir definieren den Phasenfluss $\tilde{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $D = \{(t, x_0, t_0) \in J \times \Omega \times J \mid t \in J(t_0, x_0)\}$ durch $\tilde{\Phi}(t, x_0, t_0) = x(t)$.

1. Sei $(t_2, \xi, t_1) \in D$ mit $\tilde{\Phi}(t_2, \xi, t_1) \in \Omega$. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{\Phi}(t_1, \tilde{\Phi}(t_2, \xi, t_1), t_2) = \xi$ erfüllt ist.
2. Zeigen Sie, dass $\tilde{\Phi}(t_1, \xi, t_2)$ nicht unabhängig von t_1, t_2 abhängt, sondern nur von der Differenz $t_1 - t_2$. Es ist daher keine Einschränkung, künftig nur noch $\Phi(t, x_0)$ zu $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = x_0$ zu betrachten.
3. Zeigen Sie, dass für $\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$ gilt $\Phi_{t+s}(x_0) = (\Phi_t \circ \Phi_s)(x_0)$.
4. Seien $t, -t \in J(x_0)$. Zeigen Sie, dass $\Phi_t(x_0)$ invertierbar ist mit $\Phi_t(x_0)^{-1} = \Phi_{-t}(x_0)$.
5. Sei nun $f(t, x) = A(t)x(t)$ für eine Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bezeichne $W(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Fundamentalmatrix des Systems, bestehend aus den Lösungen zu $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $x(t_0) = e^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $W(t, t_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist mit $W(t, t_0)^{-1} = W(t_0, t)$.

□ Aufgabe 18 (Orbit und ω -Limesmenge)

(5 Punkte)

Betrachten Sie das System nichtlinearer Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

1. Leiten Sie für die polaren Variablen r, φ mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ein äquivalentes System her und bestimmen Sie zu allgemeinem Anfangswert $(r, \varphi)(0) = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$ die zugehörige Lösung (r, φ) .
2. Zeigen Sie, dass der Orbit zu $\|(x_0, y_0)\|_2 = 1$ der Einheitskreis ist und dass jede vom Fixpunkt $(0, 0)$ verschiedene Lösungskurve für $t \rightarrow \infty$ gegen diesen konvergiert.

□ Aufgabe 19 (Asymptotische Stabilität und Lyapunov-Funktionen)

(5 Punkte)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x_0 = 0$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) = 0$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}_0^+)$ mit $\mathcal{L}(x) = 0$ genau für $x = x_0$ und $\langle \nabla \mathcal{L}(x), f(x) \rangle \leq 0$, wobei Gleichheit genau für x_0 gelte.

Zeigen Sie, dass x_0 dann ein asymptotisch stabiler Fixpunkt der autonomen Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist.

□ Aufgabe 20 (Grundgleichung der Mechanik)

(5 Punkte)

1750 formulierte Leonhard Euler das Gesetz *Kraft = Masse · Beschleunigung*.

Betrachten Sie eine antriebslose Lokomotive der Masse $m > 0$, die auf einer geradlinigen, horizontal verlaufenden Schiene mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ unter Einfluss der von der Geschwindigkeit v abhängigen Reibungskraft $f(v) = -\alpha - \beta v^2$ ($\alpha, \beta > 0$) entlang rollt.

1. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, bei dem die Lokomotive zum Stillstand kommt, sowie den bis dahin zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von v_0 .
2. Bestimmen Sie die maximale Fahrtdauer für $v_0 \rightarrow \infty$.