Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 27.11.2014
Abgabe: Donnerstag, 04.12.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
6. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 21** (ungedämpftes Pendel) (4 Punkte)

Betrachten Sie die nichtlineare Gleichung des ungedämpften Pendels $\ddot{y} + \sin(y) = 0$. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Lyapunov-Funktion, dass das System stabil ist.

☐ **Aufgabe 22** (gedämpftes Pendel) (8 Punkte)

1. Beweisen Sie das *Prinzip der linearisierten Stabilität*: Ist $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$ und alle Eigenwerte von $\nabla f(0)$ haben einen negativen Realteil, dann ist die Ruhelage $y_0 = 0$ des autonomen Systems $\dot{y} = f(y)$ asymptotisch stabil.

   Hinweis: Wenden Sie den Stabilitätssatz aus der Vorlesung in geeigneter Weise auf die lineare Taylor-Entwicklung von f an.

   Bemerkung: Das Nachrechnen dieser hinreichenden Bedingung ist im Allgemeinen viel einfacher als die Konstruktion einer geeigneten Lyapunovfunktion.

2. Zeigen Sie, dass die nichtlineare gedämpfte Pendelgleichung $\ddot{y} + \mu\dot{y} + \sin(y) = 0$ für Dämpfungsfaktoren $\mu \in (0, 2)$ asymptotisch stabil ist.

3. Erstellen Sie Phasenporträts des Systems $\ddot{y} + \mu\dot{y} + \sin(y) = 0$ für die Parameter $\mu = 0, 0.5, 1, 1.5$. Sie können dazu natürlich technische Hilfsmittel wie das von der Projektgruppe Analysis der Universität Innsbruck zur Verfügung gestellte Java-Applet

   `http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/dgl2d/`

   oder Matlab verwenden. Kommentieren und vergleichen Sie die Ergebnisse.

☐ **Aufgabe 23** (Stabilisatoren) (4 Punkte)

Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachte das lineare autonome System $\dot{y} = Ay$. Zeigen Sie: Existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $PA + A^{\mathrm{T}}P$ negativ definit ist, dann ist $y_0 = 0$ asymptotisch stabil.

☐ **Aufgabe 24** (Stabilität linearer Systeme) (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Ruhelage $x_0 = 0$ des Systems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf Stabilität.
