Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 04.12.2014
Abgabe: Donnerstag, 11.12.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
7. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 25** (Greensche Funktionen) (5 Punkte)

Sei $r \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems

$$\ddot{y} - y = r, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

☐ **Aufgabe 26** (Wellengleichung) (5 Punkte)

Bestimmen Sie auf $\Omega = [0,\pi]$ eine Lösung $y = y(t,x)$ der Wellengleichung $y_{tt} - y_{xx} = 0$ mit Anfangsbedingungen $y(0,x) = y_0(x)$, $y_t(0,x) = y_1(x)$ und Randbedingungen $y(t,0) = 0$, $y(t,\pi) = 0$. Machen Sie dazu den Fourierreihenansatz $y(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x)$ im Orthonormalsystem $\varphi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, und leiten Sie aus der partiellen Differenzialgleichung für y gewöhnliche Eigenwertaufgaben für die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{N}$, her. Lösen Sie diese anschließend unter Verwendung der Anfangs- und Randbedingung.

☐ **Aufgabe 27** (Eigenwert-Problem) (5 Punkte)

Sei $0 < a < b$, so dass kein Paar $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert mit $m|\ln a| = n|\ln b|$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ zu $\ddot{y}(x) = -\lambda y(x) x^{-2}$ mit Anfangsbedingungen $y(a) = 0$ und $y(b) = 0$ die Gestalt $\lambda_n = \frac{1}{4} + (\frac{n\pi}{\ln(b/a)})^2$ besitzen für geeignete $n \in \mathbb{N}$.

Speziell ist das Spektrum dieses Differenzialoperators also reell, positiv und diskret.

Hinweis: Für festes λ liegt eine *Euler-Gleichung* vor. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe geeigneter Literatur zur Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen (z.B. Heuser S. 240, Walter S. 216, Boyce & DiPrima S. 306 oder Internet) ein Lösungsverfahren für Probleme dieses Typs.

☐ **Aufgabe 28** (Knobelaufgabe) (5 Punkte)

Eine Rennschnecke kriecht über ein beliebig dehnbares Gummiband, dessen eines Ende bei $x = 0$ fixiert ist. Das freie Ende entfernt sich mit der konstanten Geschwindigkeit V vom festen Ende. Zur Zeit $t = 0$ habe das Band die Länge L und die Schnecke beginnt am fixierten Ende, mit der konstanten Eigengeschwindigkeit v auf dem Band entlang zu kriechen.

Zeigen Sie, dass die Schnecke für alle L, v, V das Bandende erreicht, und bestimmen Sie den Zeitpunkt sowie die Bandlänge in Abhängigkeit dieser Parameter, zu denen die Schnecke am Ziel angelangt ist.