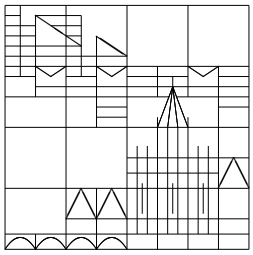
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015



Ausgabe: Donnerstag, 11.12.2014
Abgabe: Donnerstag, 18.12.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
8. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 29** (σ-Algebren) (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle σ-Algebren auf der Grundmenge $\Omega = \{\clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$.

☐ **Aufgabe 30** (Eigenschaften von σ-Algebren) (4 Punkte)

Es seien Σ und Σ' σ-Algebren auf einer Grundmenge Ω sowie $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, wobei $P(\Omega)$ die *Potenzmenge* von Ω bezeichnet. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\Sigma \cup \Sigma'$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

b) $\Sigma \cap \Sigma'$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

c) Es seien $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma$ und $\mathcal{S} \subseteq \Sigma'$. Dann ist $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

d) Es seien $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma$ und $\sigma(\mathcal{S}') = \Sigma'$. Dann ist $\sigma(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}') = \Sigma \cap \Sigma'$.

☐ **Aufgabe 31** (Borelsche σ-Algebra) (6 Punkte)

Bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die *Borel-σ-Algebra*, d.h. die vom System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ für die folgenden Teilmengensysteme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ erfüllt ist:

a) $\mathcal{S} = \{(a, b) : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$,

b) $\mathcal{S} = \{[a, b) : -\infty < a < b \leq \infty\}$,

c) $\mathcal{S} = \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ kompakt}\}$.

☐ **Aufgabe 32** (Grenzmenge) (6 Punkte)

Für eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ auf einer Grundmenge Ω definieren wir

$$\limsup(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{sowie} \quad \liminf(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Wir sagen, dass eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ gegen eine *Grenzmenge* $A \subseteq \Omega$ *konvergiert*, falls

$$A = \liminf(A_n) = \limsup(A_n).$$

a) Zeigen Sie, dass für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ stets gilt $\liminf(A_n) \subseteq \limsup(A_n)$.

b) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, sodass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder *monoton wächst*, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder *monoton fällt*, d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzmenge der Folge.

c) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob nachstehende Mengenfolgen konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzmengen:

- $A_n = \{k \in \mathbb{N} : n \text{ teilt } k\}$.
- $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ ist Primteiler von } n\}$.