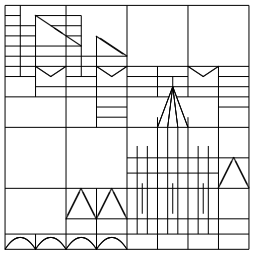
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015



Ausgabe: Donnerstag, 18.12.2014
Abgabe: Donnerstag, 15.01.2015, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
9. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 33** (Urbild-σ-Algebra) (5 Punkte)

Seien X eine nichtleere Menge, $(Y, \mathcal{Y})$ ein Messraum und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = \{f^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ eine σ-Algebra auf X ist.

☐ **Aufgabe 34** (Maße und Monotonie) (5 Punkte)

Seien $(X, \mathcal{X})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{X}$. Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ sei zudem $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $\mathcal{X}$ definiert.

☐ **Aufgabe 35** (Dirac-Maß) (5 Punkte)

Es seien $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{S} = \{A \subseteq \Omega \mid \forall a \in A : a \text{ ist gerade}\}$.

1. Charakterisieren Sie die Elemente von $\Sigma = \sigma(\mathcal{S})$.
2. Es sei $N \in \mathbb{N}$ ungerade und $\mu = \delta_N$ bezeichne das zugehörige Dirac-Maß, d.h. $\mu(N) = 1$ und $\mu(n) = 0$ für alle anderen $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Der Maßraum (Ω, Σ, μ) enthält nichtmessbare Nullmengen.

   Hinweis: $A \subseteq \Omega$ heißt eine Nullmenge, falls ein $B \in \Sigma$ existiert mit $A \subseteq B$ und $\mu(B) = 0$.
3. Wiederholen Sie Aufgabenteil (2) für den Fall, dass N gerade ist.

☐ **Aufgabe 36** (Eigenschaft äußerer Maße) (5 Punkte)

Seien X eine Menge und μ ein äußeres Maß auf X. Für eine Folge von Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X gelte $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $A = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ gilt $\mu(A) = 0$.