Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 15.01.2015
Abgabe: Donnerstag, 22.01.2015, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
10. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 37** (Messbarkeit) (5 Punkte)

1. Seien (Ω, Σ) ein Messraum und $A \subseteq \Omega$. Bestimmen Sie die Menge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ für die Fälle $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\Sigma = \sigma(\{A\})$.
2. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

☐ **Aufgabe 38** (Maße messbarer Funktionen) (5 Punkte)

Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$ ein Maßraum ist.
2. Bestimmen Sie $\nu(B)$ für den Fall $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, μ das Lebesgue-Maß, $f(x) = x^3 - 1$ und $B = [-1, 7]$.

☐ **Aufgabe 39** (σ-Algebren von Funktionen) (5 Punkte)

Seien Ω eine Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $\sigma(f)$ bezeichne den Durchschnitt aller σ-Algebren auf Ω, bzgl. derer f messbar ist.

1. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $\sigma(f) = \sigma(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{S}\})$.
2. Seien $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ und $g(x, y) = x$. Ist g $\sigma(f)$-messbar?

☐ **Aufgabe 40** (Messbare Mengen und Funktionen) (5 Punkte)

Seien X ein topologischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte x, für die $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, messbar in $(X, \mathcal{B}(X))$ ist.