Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 22.01.2015
Abgabe: Donnerstag, 29.01.2015, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III
11. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 41** (Integration mittels Lebesgue-Maß) (5 Punkte)

Sei $\Omega = [0,1]$ versehen mit der Borelschen σ-Algebra $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$ und dem Lebesgue-Maß λ.

1. Geben Sie eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ an, die punktweise gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = 1 - x$, konvergiert.
2. Berechnen Sie mittels des Satzes über monotone Konvergenz den Wert des Integrals $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\lambda$.

☐ **Aufgabe 42** (Integration mittels Zählmaß) (5 Punkte)

Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ gilt $\int_\mathbb{N} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$.

☐ **Aufgabe 43** (Integration mittels Bildmaß) (5 Punkte)

Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und ν bezeichne das von f induzierte *Bildmaß* $\nu = \mu \circ f^{-1}$, vgl. Aufgabe 38.

1. Zeigen Sie, dass für alle ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$-)messbaren, positiven Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int_\mathbb{R} g \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega g \circ f \,\mathrm{d}\mu$.
2. Seien speziell $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und μ das Zählmaß auf Σ. Berechnen Sie $\int_\mathbb{R} g \,\mathrm{d}\nu$ für den Fall $f(n) = 2^n$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, $g(x) = 0$ sonst.

☐ **Aufgabe 44** (Anwendung des Eindeutigkeitssatzes) (5 Punkte)

Seien μ, ν zwei endliche Maße auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\nu$ für alle stetigen, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\mu = \nu$ erfüllt sein muss.