



Ausgabe: Donnerstag, 29.01.2015

Abgabe: Donnerstag, 05.02.2015, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis III

12. Übungsblatt

□ **Aufgabe 45** (Integration mittels Dichten)

(5 Punkte)

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei Dichten, d.h. nichtnegative, messbare Abbildungen, und ν_f, ν_g die zugehörigen induzierten Maße. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A g \, d\nu_f = \int_A fg \, d\mu = \int_A f \, d\nu_g.$$

□ **Aufgabe 46** (Satz von Fubini)

(5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xy$ für $|xy| < 1$ und 0 sonst. Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(x) \, d\lambda(y)$$

Überprüfen Sie, ob f bzgl. des Produktmaßes $\lambda \otimes \lambda$ auf der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ integrierbar ist.

□ **Aufgabe 47** (Transformationssatz)

(5 Punkte)

Wir betrachten den Schnittkörper $V = K \cap Z$ der Kugel K mit dem Zylinder Z ,

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq (\tfrac{1}{2})^2\}.$$

1. Skizzieren Sie die Grundfläche G des Zylinders im $\mathbb{R}^2$.
2. Zeigen Sie, dass G in Polarkoordinaten gegeben ist als $U = \{(r, \varphi) \mid |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \text{ \& } 0 \leq r \leq \cos \varphi\}$, d.h. dass für die Polarkoordinatentransformation $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gilt $\Phi(U) = G$.

Hinweis: Satz von Thales.

3. Berechnen Sie das Volumen von V .

□ **Aufgabe 48** (Volumen und Trägheitsmoment eines Ellipsoids)

(5 Punkte)

Betrachten Sie das Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1\}$ mit positiven Parametern a, b, c .

Berechnen Sie das Volumen V von E sowie das Trägheitsmoment J_z , das bei Rotation von E um die z -Achse entsteht:

$$V = \int_E 1 \, d(x, y, z), \quad J_z = \int_E x^2 + y^2 \, d(x, y, z).$$

Bemerkung: Dies ist das letzte Übungsblatt der Analysis III, das korrigiert und bewertet wird. Das freiwillige dreizehnte Übungsblatt dient der Wiederholung des Vorlesungsstoffes zur Klausurvorbereitung.