Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Jianjie Lu
Wintersemester 2014/2015

Ausgabe: Donnerstag, 05.02.2015
Abgabe: Dieses Übungsblatt ist freiwillig und wird nicht bewertet.

Analysis III
13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Differenzialgleichungen) (2+4+4=10 Punkte)

Gesucht sind Lösungen von Anfangswertproblemem der Form (AWP) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(0) = x_0$, wobei t im nichtleeren Zeitintervall $J = [0, T]$ liege.

1. Überprüfen Sie (AWP) mit Hilfe der lokalen Variante des Satzes von Picard und Lindelöf auf die Existenz einer eindeutigen, in einer Umgebung $U(0, x_0)$ definierten $\mathcal{C}^1$-Lösung x für $f(t, x) = x^2$ und $x_0 > 0$ beliebig, indem Sie explizit die zentrale Voraussetzung überprüfen.

   Lösen Sie das Anfangswertproblem. Geben Sie dabei auch das maximale Existenzintervall der Lösung an.
2. Lösen Sie (AWP) mittels Variation der Konstanten für die definierende Funktion $f(t, x) = \exp(t) - 3x$.

Aufgabe 2 (Differenzialgleichungen) (2+3+1=6 Punkte)

1. Überprüfen Sie den Fixpunkt $x_0 = (0, 0)$ des folgenden linearen Systems auf Stabilität:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

2. Überprüfen Sie den Fixpunkt $x_0 = (0, 0)$ des folgenden nichtlinearen Systems auf Stabilität:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) - x(t) \\ x^2(t) - y(t) \end{pmatrix}.$$

   Besitzt die Gleichung weitere Fixpunkte?

Aufgabe 3 (Differenzialgleichungen) (1+1+2=4 Punkte)

Ein ruhig atmender erwachsener Mensch macht etwa 16 Atemzüge in der Minute. Bei jedem Atemzug werden ungefähr 0,5 Liter Luft in die Lunge aufgenommen. Die ausgeatmete Luft enthält näherungsweise 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete; sie möge sich mit der Zimmerluft sofort und vollständig vermischen. In einem geschlossenen Zimmer befinden sich V Liter Luft und ein ruhig atmender Erwachsener. t Minuten nach der Zeit $t_0 = 0$ seien $S(t)$ Liter Sauerstoff im Zimmer vorhanden und es sei $S(0) = S_0$.

1. Wieviel Liter Sauerstoff werden in einer kurzen Zeitspanne Δt eingeatmet?
2. Nehmen Sie an, $S(t)$ wäre bekannt. Wie hoch ist der Sauerstoffgehalt $S(t + \Delta t)$ noch nach $t + \Delta t$ Minuten?
3. Betrachten Sie den Grenzübergang $\Delta t \to 0$. Geben sie das resultierende Anfangswertproblem für die Funktion S an und lösen sie es.

Aufgabe 4 (Maßtheorie) (4 Punkte)

Seien X ein topologischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $X \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte x mit $f_n(x) \to 2015$ für $n \to \infty$ messbar in $(X, \mathcal{B}(X))$ ist.

Aufgabe 5 (Maßtheorie) (2+4=6 Punkte)

1. a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Definieren Sie: $f : X \to \mathbb{R}$ ist eine Stufenfunktion.
   b) Geben Sie den Wert des Integrals von f an.
2. a) Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume. Definieren Sie die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sowie das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$.
   b) Formulieren Sie den Satz von Tonelli (mit Voraussetzungen).